Τι είναι συνάρτηση;

Μια προσέγγιση στο Γυμνάσιο και το Λύκειο

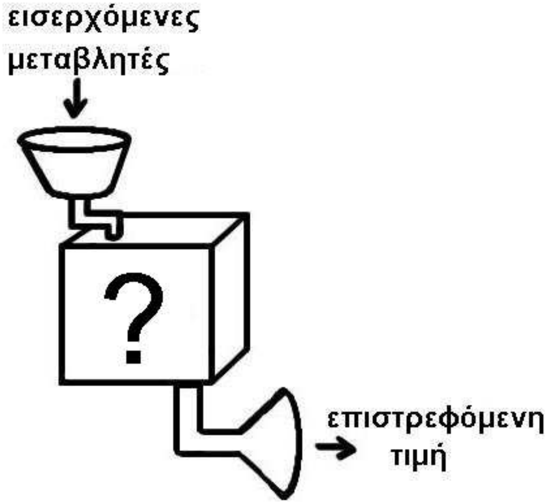
Ειρήνη Περυσινάκη

Ελληνικη Μαθηματικη Εταιρεια
Παραρτημα Ηρακλειου

16 Φεβρουαρίου 2008

Περιεχόμενα

Η μηχανή της συνάρτησης



Περιεχόμενα

Πρώτες προσπάθειες ορισμού της έννοιας

Τον όρο «συνάρτηση» εισήγαγε ο Leibnitz όπως και τα σύμβολα dy/dx και $\int dx$.

Συνάρτηση αποτελεί μια έκφραση που κατασκευάζεται με ορισμένο τρόπο από ένα μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές.

Bernoulli

Συνάρτηση αποτελεί μια αναλυτική έκφραση κατασκευασμένη από ένα μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές ...
είναι δυνατόν να ονομαστεί συνάρτηση «κάθε ελεύθερα σχεδιασμένη καμπύλη»...

Euler

Ο Euler εισήγαγε και το συμβολισμό $f(x)$.

Πρώτες προσπάθειες ορισμού της έννοιας

Τον όρο «συνάρτηση» εισήγαγε ο Leibnitz όπως και τα σύμβολα dy/dx και $\int dx$.

Συνάρτηση αποτελεί μια έκφραση που κατασκευάζεται με ορισμένο τρόπο από ένα μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές.

Bernoulli

Συνάρτηση αποτελεί μια αναλυτική έκφραση κατασκευασμένη από ένα μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές . . .
είναι δυνατόν να ονομαστεί συνάρτηση «κάθε ελεύθερα σχεδιασμένη καμπύλη». . .

Euler

Ο Euler εισήγαγε και το συμβολισμό $f(x)$.

Πρώτες προσπάθειες ορισμού της έννοιας

Τον όρο «συνάρτηση» εισήγαγε ο Leibnitz όπως και τα σύμβολα dy/dx και $\int dx$.

Συνάρτηση αποτελεί μια έκφραση που κατασκευάζεται με ορισμένο τρόπο από ένα μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές.

Bernoulli

Συνάρτηση αποτελεί μια αναλυτική έκφραση κατασκευασμένη από ένα μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές ...
είναι δυνατόν να ονομαστεί συνάρτηση «κάθε ελεύθερα σχεδιασμένη καμπύλη»...

Euler

Ο Euler εισήγαγε και το συμβολισμό $f(x)$.

Πρώτες προσπάθειες ορισμού της έννοιας

Τον όρο «συνάρτηση» εισήγαγε ο Leibnitz όπως και τα σύμβολα dy/dx και $\int dx$.

Συνάρτηση αποτελεί μια έκφραση που κατασκευάζεται με ορισμένο τρόπο από ένα μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές.

Bernoulli

Συνάρτηση αποτελεί μια αναλυτική έκφραση κατασκευασμένη από ένα μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές ...
είναι δυνατόν να ονομαστεί συνάρτηση «κάθε ελεύθερα σχεδιασμένη καμπύλη»...

Euler

Ο Euler εισήγαγε και το συμβολισμό $f(x)$.

Ο συνολοθεωρητικός ορισμός

Αυτή η γενική έννοια απαιτεί με τον όρο συνάρτηση του x να εννοούμε τον αριθμό που δίνεται για κάθε x και ο οποίος μεταβάλλεται σταδιακά μαζί με το x. Η τιμή μιας συνάρτησης μπορεί να ορίζεται από κάποια αναλυτική έκφραση ή από μια συνθήκη που παρέχει τη δυνατότητα να δοκιμάσουμε όλους τους αριθμούς και να επιλέξουμε έναν από αυτούς ή, τέλος, η εξάρτηση ενδέχεται να υπάρχει και να παραμένει άγνωστη.

Η γενική μορφή της θεωρίας δέχεται την ύπαρξη μιας εξάρτησης μόνον υπό την έννοια ότι οφείλουμε να νοούμε τους σχετιζόμενους αριθμούς ως δεδομένους ομού.

N.I. Lobačevskiĭ

Ο συνολοθεωρητικός ορισμός

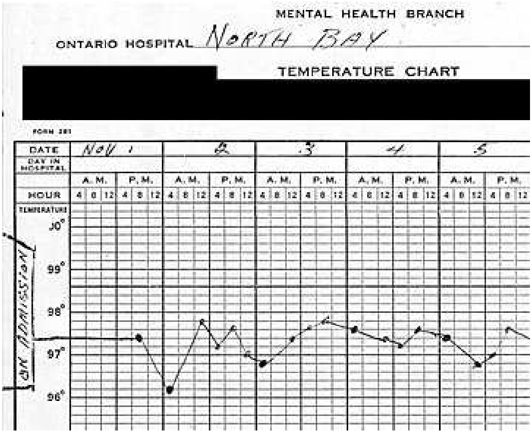
Συνάρτηση με πεδίο οριμού το σύνολο A και πεδίο τιμών το σύνολο B είναι μια σχέση κατά την οποία σε κάθε στοιχείο x του συνόλου A αντιστοιχεί ένα μοναδικό στοιχείο y του συνόλου B που συμβολίζουμε με $f(x)$.

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

Περιεχόμενα

Μεταβολές: Πυρετικό διάγραμμα

Προβάλλοντας τα πλεονεκτήματα του γραφήματος.



Περιεχόμενα

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

...Παίζοντας ...

Μαντεύοντας έναν αριθμό

- Βάλε έναν αριθμό στο νού σου.
- Βάλε και για τον φίλο σου άλλα τόσα.
- Βάλε και για μένα 10.
- Ρίξε τα μισά στη θάλασσα.
- Δώσε πίσω στο φίλο σου τα δικά του.
- 5 δε σου έμειναν;

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

...Παίζοντας ...

Μαντεύοντας έναν αριθμό

- Βάλε έναν αριθμό στο νού σου.
- Βάλε και για τον φίλο σου άλλα τόσα.
- Βάλε και για μένα 10.
- Ρίξε τα μισά στη θάλασσα.
- Δώσε πίσω στο φίλο σου τα δικά του.
- 5 δε σου έμειναν;

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

...Παίζοντας ...

Μαντεύοντας έναν αριθμό

- Βάλε έναν αριθμό στο νού σου.
- Βάλε και για τον φίλο σου άλλα τόσα.
- Βάλε και για μένα 10.
- Ρίξε τα μισά στη θάλασσα.
- Δώσε πίσω στο φίλο σου τα δικά του.
- 5 δε σου έμειναν;

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

. . . *Παίζοντας* . . .

Μαντεύοντας έναν αριθμό

- Βάλε έναν αριθμό στο νού σου.
- Βάλε και για τον φίλο σου άλλα τόσα.
- Βάλε και για μένα 10.
- Ρίξε τα μισά στη θάλασσα.
- Δώσε πίσω στο φίλο σου τα δικά του.
- 5 δε σου έμειναν;

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

. . . Παίζοντας . . .

Μαντεύοντας έναν αριθμό

- Βάλε έναν αριθμό στο νού σου.
- Βάλε και για τον φίλο σου άλλα τόσα.
- Βάλε και για μένα 10.
- Ρίξε τα μισά στη θάλασσα.
- Δώσε πίσω στο φίλο σου τα δικά του.
- 5 δε σου έμειναν;

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

. . . Παίζοντας . . .

Μαντεύοντας έναν αριθμό

- Βάλε έναν αριθμό στο νού σου.
- Βάλε και για τον φίλο σου άλλα τόσα.
- Βάλε και για μένα 10.
- Ρίξε τα μισά στη θάλασσα.
- Δώσε πίσω στο φίλο σου τα δικά του.
- 5 δε σου έμειναν;

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

...Παίζοντας ...

Μαντεύοντας έναν αριθμό

- Βάλε έναν αριθμό στο νού σου.
- Βάλε και για τον φίλο σου άλλα τόσα.
- Βάλε και για μένα 10.
- Ρίξε τα μισά στη θάλασσα.
- Δώσε πίσω στο φίλο σου τα δικά του.
- 5 δε σου έμειναν;

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

...*Παίζοντας* ...

Μαντεύοντας έναν αριθμό

- Βάλε έναν αριθμό στο νού σου.
- Βάλε και για τον φίλο σου άλλα τόσα.
- Βάλε και για μένα 10.
- Ρίξε τα μισά στη θάλασσα.
- Δώσε πίσω στο φίλο σου τα δικά του.
- 5 δε σου έμειναν;

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

...Παίζοντας ...

Η μαθηματική ερμηνεία

- Βάλε έναν αριθμό στο νού σου.
- Βάλε και για τον φίλο σου άλλα τόσα.
- Βάλε και για μένα 10.
- Ρίξε τα μισά στη θάλασσα.
- Δώσε πίσω στο φίλο σου τα δικά του.
- 5 δε σου έμειναν;

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

. . . *Παίζοντας* . . .

Η μαθηματική ερμηνεία

- x
- Βάλε και για τον φίλο σου άλλα τόσα.
- Βάλε και για μένα 10.
- Ρίξε τα μισά στη θάλασσα.
- Δώσε πίσω στο φίλο σου τα δικά του.
- 5 δε σου έμειναν;

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

...Παίζοντας ...

Η μαθηματική ερμηνεία

- x
- $2x$
- Βάλε και για μένα 10.
- Ρίξε τα μισά στη θάλασσα.
- Δώσε πίσω στο φίλο σου τα δικά του.
- 5 δε σου έμειναν;

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

. . . Παίζοντας . . .

Η μαθηματική ερμηνεία

- x
- $2x$
- $2x + 10$
- Ρίξε τα μισά στη θάλασσα.
- Δώσε πίσω στο φίλο σου τα δικά του.
- 5 δε σου έμειναν;

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

...Παίζοντας ...

Η μαθηματική ερμηνεία

- x
- $2x$
- $2x + 10$
- $\frac{1}{2}(2x + 10)$
- Δώσε πίσω στο φίλο σου τα δικά του.
- 5 δε σου έμειναν;

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

...Παίζοντας ...

Η μαθηματική ερμηνεία

- x
- $2x$
- $2x + 10$
- $\frac{1}{2}(2x + 10)$
- $\frac{1}{2}(2x + 10) - x$
- 5 δε σου έμειναν;

Διαδικασίες: Κατανοώντας τη σταθερή συνάρτηση

...Παίζοντας ...

Η μαθηματική ερμηνεία

- x
- $2x$
- $2x + 10$
- $\frac{1}{2}(2x + 10)$
- $\frac{1}{2}(2x + 10) - x$
- $= 5$

Διαδικασίες: Σύνθετες συναρτήσεις.

$$f(x) = \eta\mu\left(e^{x^2+1}\right)$$

$$x \to x^2 \to x^2+1 \to e^{x^2+1} \to \eta\mu\left(e^{x^2+1}\right)$$

Διαδικασίες: Σύνθετες συναρτήσεις.

$$f(x) = ημ\left(e^{x^2+1}\right)$$

$$x \rightarrow x^2 \rightarrow x^2+1 \rightarrow e^{x^2+1} \rightarrow ημ\left(e^{x^2+1}\right)$$

Διαδικασίες: Σύνθετες συναρτήσεις.

$$f(x) = \eta\mu\left(e^{x^2+1}\right)$$

$$x \rightarrow x^2 \rightarrow x^2+1 \rightarrow e^{x^2+1} \rightarrow \eta\mu\left(e^{x^2+1}\right)$$

Διαδικασίες: Σύνθετες συναρτήσεις.

$$f(x) = \eta\mu\left(e^{x^2+1}\right)$$

$$x \rightarrow x^2 \rightarrow x^2 + 1 \rightarrow e^{x^2+1} \rightarrow \eta\mu\left(e^{x^2+1}\right)$$

Διαδικασίες: Σύνθετες συναρτήσεις.

$$f(x) = \eta\mu\left(e^{x^2+1}\right)$$

$$x \to x^2 \to x^2+1 \to e^{x^2+1} \to \eta\mu\left(e^{x^2+1}\right)$$

Διαδικασίες: Σύνθετες συναρτήσεις.

$$f(x) = \eta\mu\left(e^{x^2+1}\right)$$

$$x \rightarrow x^2 \rightarrow x^2+1 \rightarrow e^{x^2+1} \rightarrow \eta\mu\left(e^{x^2+1}\right)$$

Διαδικασίες: Συμπλήρωση τετραγώνου στο τριώνυμο.

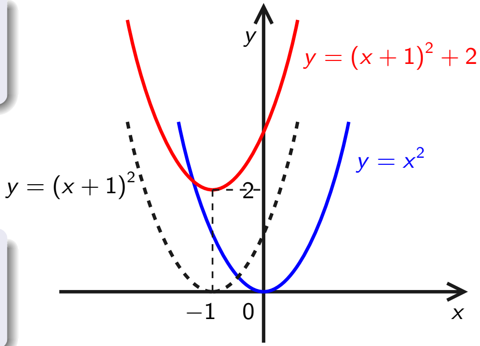
$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$x \to x^2 \to x^2 + 2x \to x^2 + 2x + 3$$

...Εναλλακτικά ...

$$f(x) = (x+1)^2 + 2$$

$$x \to x+1 \to (x+1)^2 \to (x+1)^2 + 2$$



Άπειρες διαδικασίες: Η εκθετική . . . διαφορετικά.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

. . . *Επομένως* . . .

$$(e^x)' = e^x$$

και

$$e^0 = 1$$

Άπειρες διαδικασίες: Η εκθετική ...διαφορετικά.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

...Επομένως ...

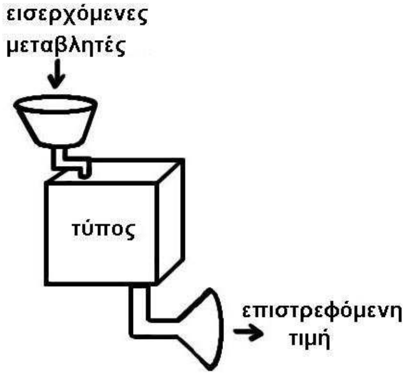
$$(e^x)' = e^x$$

και

$$e^0 = 1$$

Περιεχόμενα

Ο γνωστός τύπος συνάρτησης.



Παράδειγμα: «εικονικό» εστιατόριο

Ο ιδιοκτήτης ενός εστιατορίου έκανε τους ακόλουθους λογαριασμούς που δείχνουν τη σχέση μεταξύ του καθαρού κέρδους και του αριθμού των πελατών.

Αριθμός πελατών	30	40	50	60			
Καθαρό κέρδος σε €	100	200	300	400	...	...	...

- Ποιος είναι ο αριθμός των πελατών όταν δεν υπάρχει κέρδος;
- Τι συμβαίνει όταν το πλήθος των πελατών είναι μικρότερο από 20;
- Πότε αρχίζει η ζημιά;
- Υπάρχει κάποια μέθοδος με την οποία απαντάμε σε όλες αυτές τις ερωτήσεις;

Παράδειγμα: «εικονικό» εστιατόριο

Ο ιδιοκτήτης ενός εστιατορίου έκανε τους ακόλουθους λογαριασμούς που δείχνουν τη σχέση μεταξύ του καθαρού κέρδους και του αριθμού των πελατών.

Αριθμός πελατών	30	40	50	60			
Καθαρό κέρδος σε €	100	200	300	400	...	...	...

- Ποιος είναι ο αριθμός των πελατών όταν δεν υπάρχει κέρδος;
- Τι συμβαίνει όταν το πλήθος των πελατών είναι μικρότερο από 20;
- Πότε αρχίζει η ζημιά;
- Υπάρχει κάποια μέθοδος με την οποία απαντάμε σε όλες αυτές τις ερωτήσεις;

Ισότητα συναρτήσεων: Ιστορικό σχόλιο.

Η ζ συνάρτηση του Euler ορίζεται για κάθε πραγματικό x ως εξής:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots$$

Ο Euler απέδειξε ότι η ίδια συνάρτηση περιγράφεται και από έναν δεύτερο τύπο:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-(1/2)^x} \times \frac{1}{1-(1/3)^x} \times \frac{1}{1-(1/5)^x} \times \frac{1}{1-(1/7)^x} \times \cdots$$

Ο Riemann επέκτεινε τον ορισμό της ζ συνάρτησης και για μιγαδικά z. Μάλιστα διατύπωσε την εικασία ότι οι ρίζες της βρίσκονται στη μιγαδική ευθεία $Re(z) = 1/2$ (υπόθεση Riemann), ερώτημα που παραμένει ακόμα και σήμερα ανοιχτό.

Ισότητα συναρτήσεων: Ιστορικό σχόλιο.

Η ζ συνάρτηση του Euler ορίζεται για κάθε πραγματικό x ως εξής:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots$$

Ο Euler απέδειξε ότι η ίδια συνάρτηση περιγράφεται και από έναν δεύτερο τύπο:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-(1/2)^x} \times \frac{1}{1-(1/3)^x} \times \frac{1}{1-(1/5)^x} \times \frac{1}{1-(1/7)^x} \times \cdots$$

Ο Riemann επέκτεινε τον ορισμό της ζ συνάρτησης και για μιγαδικά z. Μάλιστα διατύπωσε την εικασία ότι οι ρίζες της βρίσκονται στη μιγαδική ευθεία $Re(z) = 1/2$ (υπόθεση Riemann), ερώτημα που παραμένει ακόμα και σήμερα ανοιχτό.

Ισότητα συναρτήσεων: Ιστορικό σχόλιο.

Η ζ συνάρτηση του Euler ορίζεται για κάθε πραγματικό x ως εξής:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots$$

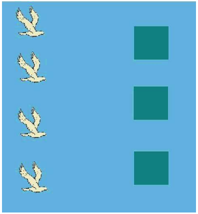
Ο Euler απέδειξε ότι η ίδια συνάρτηση περιγράφεται και από έναν δεύτερο τύπο:

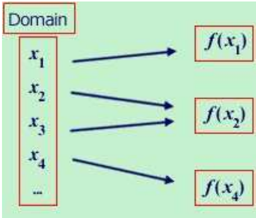
$$\zeta(x) = \frac{1}{1-(1/2)^x} \times \frac{1}{1-(1/3)^x} \times \frac{1}{1-(1/5)^x} \times \frac{1}{1-(1/7)^x} \times \cdots$$

Ο Riemann επέκτεινε τον ορισμό της ζ συνάρτησης και για μιγαδικά z. Μάλιστα διατύπωσε την εικασία ότι οι ρίζες της βρίσκονται στη μιγαδική ευθεία $Re(z) = 1/2$ (υπόθεση Riemann), ερώτημα που παραμένει ακόμα και σήμερα ανοιχτό.

Το σύνολο τιμών και η 1—1 ιδιότητα.

Η αρχή του Περιστερώνα





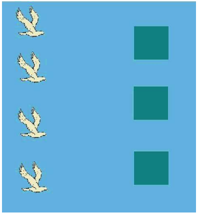
Πρόταση

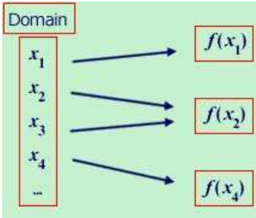
Σε κάθε κυρτό πολύεδρο υπάρχουν τουλάχιστον δύο έδρες με τον ίδιο αριθμό κορυφών.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση
έδρα του πολύεδρου $\to$ αριθμός κορυφών της έδρας

Το σύνολο τιμών και η 1—1 ιδιότητα.

Η αρχή του Περιστερώνα





Πρόταση

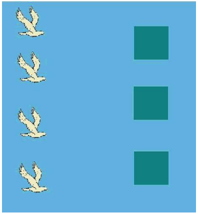
Σε κάθε κυρτό πολύεδρο υπάρχουν τουλάχιστον δύο έδρες με τον ίδιο αριθμό κορυφών.

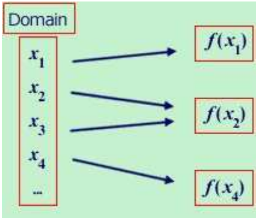
Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση

έδρα του πολύεδρου $\rightarrow$ αριθμός κορυφών της έδρας

Το σύνολο τιμών και η 1—1 ιδιότητα.

Η αρχή του Περιστερώνα





Πρόταση

Σε κάθε κυρτό πολύεδρο υπάρχουν τουλάχιστον δύο έδρες με τον ίδιο αριθμό κορυφών.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση

έδρα του πολύεδρου $\to$ αριθμός κορυφών της έδρας

Το σύνολο τιμών και η 1—1 ιδιότητα.

Το παράδοξο του άπειρου ξενοδοχείου.

Σε κάποιο ξενοδοχείο υπάρχουν άπειρα δωμάτια αριθμημένα 1, 2, 3, 4, ... Στην πόλη διεξάγεται ένα φεστιβάλ και όλα τα δωμάτια είναι κατειλημμένα. Λόγω όμως των μεγάλων απαιτήσεων, ο ιδιοκτήτης αναγκάζεται να δεχτεί «άλλους τόσους» πελάτες. Ποια όμως δωμάτια θα διαθέσει στους καινούριους πελάτες;

Γρήγορα βρίσκει την εξής λύση: Κάθε «παλιός» πελάτης μετακινείται στο δωμάτιο με νούμερο το διπλάσιο του αρχικού του δωματίου. Έτσι, οι «παλιοί» πελάτες καταλαμβάνουν δωμάτια με ζυγούς αριθμούς, ενώ τα δωμάτια με τους μονούς αριθμούς είναι στη διάθεση των «νέων» πελατών.

$$f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} \qquad f(n) = 2n$$

Το σύνολο τιμών και η 1—1 ιδιότητα.

Το παράδοξο του άπειρου ξενοδοχείου.

Σε κάποιο ξενοδοχείο υπάρχουν άπειρα δωμάτια αριθμημένα 1, 2, 3, 4, ... Στην πόλη διεξάγεται ένα φεστιβάλ και όλα τα δωμάτια είναι κατειλημμένα. Λόγω όμως των μεγάλων απαιτήσεων, ο ιδιοκτήτης αναγκάζεται να δεχτεί «άλλους τόσους» πελάτες. Ποια όμως δωμάτια θα διαθέσει στους καινούριους πελάτες;
Γρήγορα βρίσκει την εξής λύση: Κάθε «παλιός» πελάτης μετακινείται στο δωμάτιο με νούμερο το διπλάσιο του αρχικού του δωματίου. Έτσι, οι «παλιοί» πελάτες καταλαμβάνουν δωμάτια με ζυγούς αριθμούς, ενώ τα δωμάτια με τους μονούς αριθμούς είναι στη διάθεση των «νέων» πελατών.

$f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} \qquad f(n) = 2n$

Το σύνολο τιμών και η 1—1 ιδιότητα.

Το παράδοξο του άπειρου ξενοδοχείου.

Σε κάποιο ξενοδοχείο υπάρχουν άπειρα δωμάτια αριθμημένα 1, 2, 3, 4, ... Στην πόλη διεξάγεται ένα φεστιβάλ και όλα τα δωμάτια είναι κατειλημμένα. Λόγω όμως των μεγάλων απαιτήσεων, ο ιδιοκτήτης αναγκάζεται να δεχτεί «άλλους τόσους» πελάτες. Ποια όμως δωμάτια θα διαθέσει στους καινούριους πελάτες;

Γρήγορα βρίσκει την εξής λύση: Κάθε «παλιός» πελάτης μετακινείται στο δωμάτιο με νούμερο το διπλάσιο του αρχικού του δωματίου. Έτσι, οι «παλιοί» πελάτες καταλαμβάνουν δωμάτια με ζυγούς αριθμούς, ενώ τα δωμάτια με τους μονούς αριθμούς είναι στη διάθεση των «νέων» πελατών.

$$f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} \qquad f(n) = 2n$$

Σύνθετοι κανόνες αντιστοίχησης.

...Αντιμέτωποι με τις κλαδωτές συναρτήσεις ...

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

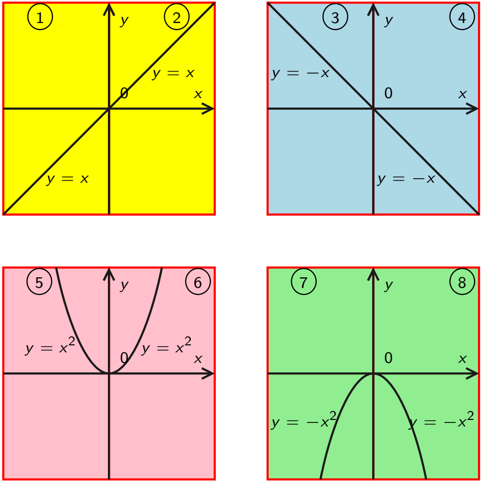
Σύνθετοι κανόνες αντιστοίχησης.

...Αντιμέτωποι με τις κλαδωτές συναρτήσεις ...

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

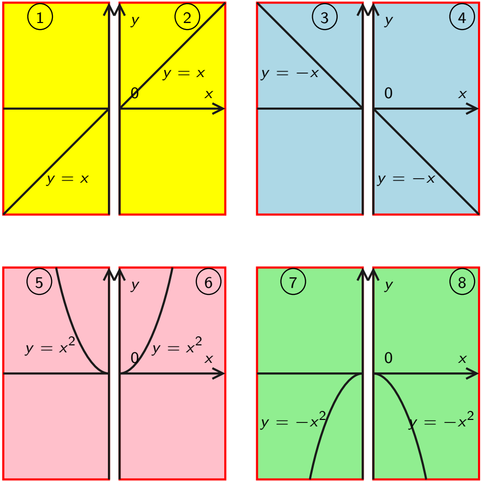
Σύνθετοι κανόνες αντιστοίχησης.

Δραστηριότητα



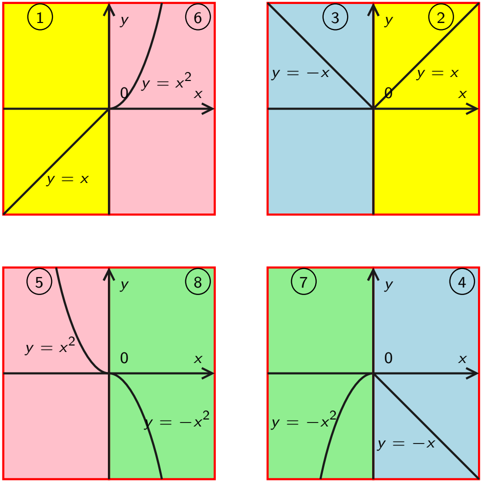
Σύνθετοι κανόνες αντιστοίχησης.

Δραστηριότητα



Σύνθετοι κανόνες αντιστοίχησης.

Δραστηριότητα



Όταν ο κανόνας αντιστοίχησης δε μπορεί να δοθεί με κάποιο «τύπο».

$$f(x) = \int_0^x e^{u^2}\,du$$

. . . *Προσέγγιση* . . .

Όταν ο κανόνας αντιστοίχησης δε μπορεί να δοθεί με κάποιο «τύπο».

$$f(x) = \int_0^x e^{u^2}\,du$$

$\ldots$ *Προσέγγιση* $\ldots$

Όταν ο κανόνας αντιστοίχησης δε μπορεί να δοθεί με κάποιο «τύπο».

Πόσοι πρώτοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στους N αρχικούς φυσικούς $\{1, 2, 3, \dots, N\}$;

$$D_N = \frac{P(N)}{N}$$

Εικασία Gauss (1791)

$$D_N \approx \frac{1}{\ln N}$$

Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών
Hadamard—de la Valée Poussin (1896)

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\ln N \cdot P(N)}{N} = 1$$

Όταν ο κανόνας αντιστοίχησης δε μπορεί να δοθεί με κάποιο «τύπο».

Πόσοι πρώτοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στους N αρχικούς φυσικούς $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$;

$$D_N = \frac{P(N)}{N}$$

Εικασία Gauss (1791)

$$D_N \approx \frac{1}{\ln N}$$

Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών Hadamard—de la Valée Poussin (1896)

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\ln N \cdot P(N)}{N} = 1$$

Όταν ο κανόνας αντιστοίχησης δε μπορεί να δοθεί με κάποιο «τύπο».

Πόσοι πρώτοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στους N αρχικούς φυσικούς $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$;

$$D_N = \frac{P(N)}{N}$$

Εικασία Gauss (1791)

$$D_N \approx \frac{1}{\ln N}$$

Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών Hadamard—de la Valée Poussin (1896)

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\ln N \cdot P(N)}{N} = 1$$

Όταν ο κανόνας αντιστοίχησης δε μπορεί να δοθεί με κάποιο «τύπο».

Πόσοι πρώτοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στους N αρχικούς φυσικούς $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$;

$$D_N = \frac{P(N)}{N}$$

Εικασία Gauss (1791)

$$D_N \approx \frac{1}{\ln N}$$

Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών
Hadamard—de la Valée Poussin (1896)

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\ln N \cdot P(N)}{N} = 1$$

Περιεχόμενα

Αγορά κινητού.

Το πρόβλημα

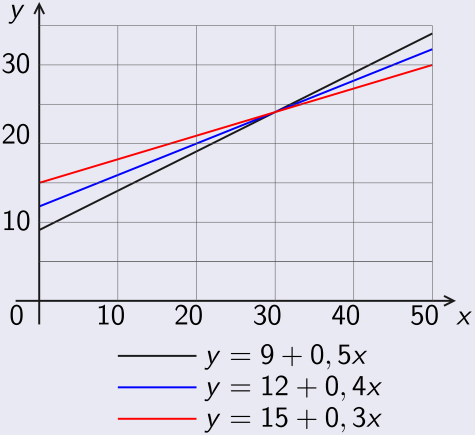
Ας υποθέσουμε ότι θέλετε να αγοράσετε κινητό τηλέφωνο και μετά από έρευνα στην αγορά καταλήξατε μεταξύ τριών αξιόπιστων εταιριών...Α-Β-Γ.

- Η Α χρεώνει το μηνιαίο πάγιο 15 € και 0,30 € το κάθε λεπτό τηλεφωνικής κλήσης.
- Η Β χρεώνει το μηνιαίο πάγιο 12 € και 0,40 € το κάθε λεπτό τηλεφωνικής κλήσης.
- Η Γ χρεώνει το μηνιαίο πάγιο 9 € και 0,50 € το κάθε λεπτό τηλεφωνικής κλήσης.

Ποια εταιρεία σας συμφέρει να επιλέξετε τελικά;

Αγορά κινητού.

Η γραφική αναπαράσταση



π^e ή e^π;

Ποιο είναι μεγαλύτερο; Το π^e ή το e^π;

Ποιος από τους αριθμούς $\pi^{1/\pi}$ και $e^{1/e}$ είναι ο μεγαλύτερος;

π^e ή e^π;

Ποιο είναι μεγαλύτερο; Το π^e ή το e^π;

Ποιος από τους αριθμούς $\pi^{1/\pi}$ και $e^{1/e}$ είναι ο μεγαλύτερος;

Περιεχόμενα

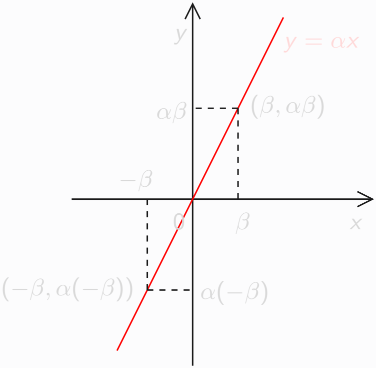
Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

Γιατί $\alpha(-\beta) = -\alpha\beta$;

Αλγεβρικό επιχείρημα

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\left[\beta + (-\beta)\right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha(-\beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha(-\beta) &= -\alpha\beta \end{aligned}$$

Γεωμετρικό επιχείρημα.



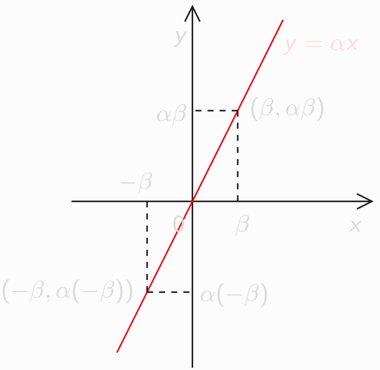
Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

Γιατί $\alpha(-\beta) = -\alpha\beta$;

Αλγεβρικό επιχείρημα

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\left[\beta + (-\beta)\right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha(-\beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha(-\beta) &= -\alpha\beta \end{aligned}$$

Γεωμετρικό επιχείρημα.



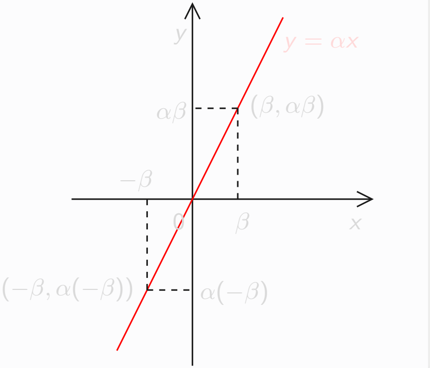
Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

Γιατί $\alpha(-\beta) = -\alpha\beta$;

Αλγεβρικό επιχείρημα

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\,[\beta + (-\beta)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha(-\beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha(-\beta) &= -\alpha\beta \end{aligned}$$

Γεωμετρικό επιχείρημα.



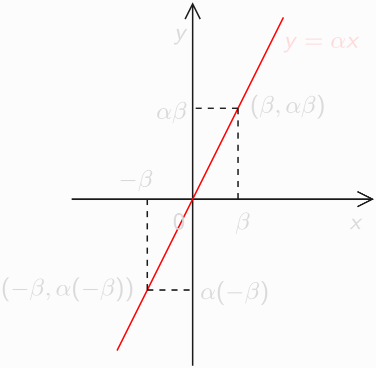
Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

Γιατί $\alpha(-\beta) = -\alpha\beta$;

Αλγεβρικό επιχείρημα

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\,[\beta + (-\beta)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha(-\beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha(-\beta) &= -\alpha\beta \end{aligned}$$

Γεωμετρικό επιχείρημα.



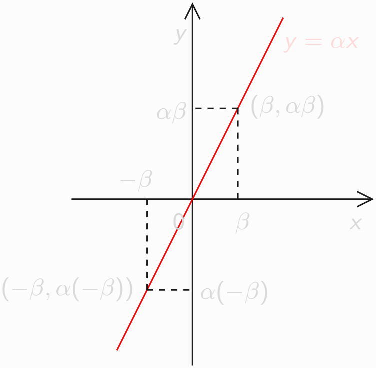
Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

Γιατί $\alpha(-\beta) = -\alpha\beta$;

Αλγεβρικό επιχείρημα

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\,[\beta + (-\beta)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha(-\beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha(-\beta) &= -\alpha\beta \end{aligned}$$

Γεωμετρικό επιχείρημα.



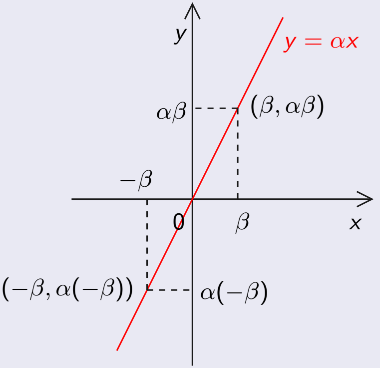
Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

Γιατί $\alpha(-\beta) = -\alpha\beta$;

Αλγεβρικό επιχείρημα

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\left[\beta + (-\beta)\right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha(-\beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha(-\beta) &= -\alpha\beta \end{aligned}$$

Γεωμετρικό επιχείρημα.



Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

Πρόταση

Οι επόμενες δυο προτάσεις είναι ισοδύναμες.

1. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει
$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$
2. Για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α, η καμπύλη $y=\alpha x$ είναι ευθεία γραμμή.

Απόδειξη (2. $\Rightarrow$ 1.):
Έστω α, β και γ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Θα αποδείξουμε ότι αν η $f(x)=\alpha x$ είναι γραμμική, τότε ισχύει

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

Πρόταση

Οι επόμενες δυο προτάσεις είναι ισοδύναμες.

1. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει
$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$
2. Για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό α, η καμπύλη $y = \alpha x$ είναι ευθεία γραμμή.

Απόδειξη (2. $\Rightarrow$ 1.):
Έστω α, β και γ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Θα αποδείξουμε ότι αν η $f(x) = \alpha x$ είναι γραμμική, τότε ισχύει

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

$$\begin{aligned} f(\beta)+f(\gamma) &= \alpha\beta+\alpha\gamma \\ &= \frac{1}{2}\alpha\cdot 2\beta+\frac{1}{2}\alpha\cdot 2\gamma \\ &= \frac{1}{2}f(2\beta)+\frac{1}{2}f(2\gamma) && \text{ορισμός της } f \\ &= f\left(\frac{1}{2}2\beta+\frac{1}{2}2\gamma\right) && \text{γραμμικότητα της } f \\ &= f(\beta+\gamma) \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} f(\beta)+f(\gamma) &= f(\beta+\gamma) \\ \Leftrightarrow \alpha\beta+\alpha\gamma &= \alpha(\beta+\gamma) \end{aligned}$$

Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

$$
\begin{aligned}
f(\beta)+f(\gamma) &= \alpha\beta+\alpha\gamma \\
&= \frac{1}{2}\alpha\cdot 2\beta+\frac{1}{2}\alpha\cdot 2\gamma \\
&= \frac{1}{2}f(2\beta)+\frac{1}{2}f(2\gamma) && \text{ορισμός της } f \\
&= f\left(\frac{1}{2}2\beta+\frac{1}{2}2\gamma\right) && \text{γραμμικότητα της } f \\
&= f(\beta+\gamma)
\end{aligned}
$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$
\begin{aligned}
f(\beta)+f(\gamma) &= f(\beta+\gamma) \\
\Leftrightarrow \alpha\beta+\alpha\gamma &= \alpha(\beta+\gamma)
\end{aligned}
$$

Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

$$\begin{aligned}
f(\beta)+f(\gamma) &= \alpha\beta+\alpha\gamma \\
&= \frac{1}{2}\alpha\cdot 2\beta+\frac{1}{2}\alpha\cdot 2\gamma \\
&= \frac{1}{2}f(2\beta)+\frac{1}{2}f(2\gamma) && \text{ορισμός της } f \\
&= f\left(\frac{1}{2}2\beta+\frac{1}{2}2\gamma\right) && \text{γραμμικότητα της } f \\
&= f(\beta+\gamma)
\end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}
f(\beta)+f(\gamma) &= f(\beta+\gamma) \\
\Leftrightarrow \alpha\beta+\alpha\gamma &= \alpha(\beta+\gamma)
\end{aligned}$$

Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

$$
\begin{aligned}
f(\beta)+f(\gamma) &= \alpha\beta+\alpha\gamma \\
&= \frac{1}{2}\alpha\cdot 2\beta+\frac{1}{2}\alpha\cdot 2\gamma \\
&= \frac{1}{2}f(2\beta)+\frac{1}{2}f(2\gamma) && \text{ορισμός της } f \\
&= f\left(\frac{1}{2}2\beta+\frac{1}{2}2\gamma\right) && \text{γραμμικότητα της } f \\
&= f(\beta+\gamma)
\end{aligned}
$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$
\begin{aligned}
f(\beta)+f(\gamma) &= f(\beta+\gamma) \\
\Leftrightarrow \alpha\beta+\alpha\gamma &= \alpha(\beta+\gamma)
\end{aligned}
$$

Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

$$\begin{aligned} f(\beta)+f(\gamma) &= \alpha\beta+\alpha\gamma \\ &= \frac{1}{2}\alpha\cdot 2\beta+\frac{1}{2}\alpha\cdot 2\gamma \\ &= \frac{1}{2}f(2\beta)+\frac{1}{2}f(2\gamma) && \text{ορισμός της } f \\ &= f\left(\frac{1}{2}2\beta+\frac{1}{2}2\gamma\right) && \text{γραμμικότητα της } f \\ &= f(\beta+\gamma) \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} f(\beta)+f(\gamma) &= f(\beta+\gamma) \\ \Leftrightarrow \alpha\beta+\alpha\gamma &= \alpha(\beta+\gamma) \end{aligned}$$

Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

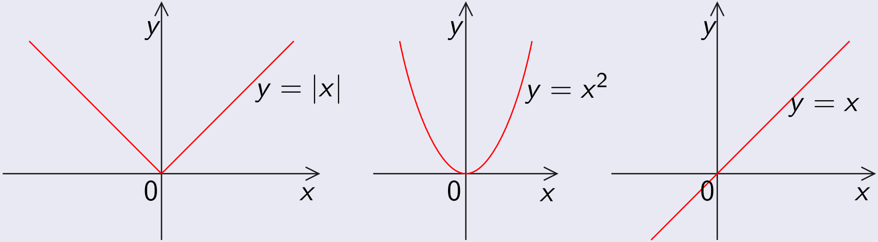
$$
\begin{aligned}
f(\beta) + f(\gamma) &= \alpha\beta + \alpha\gamma \\
&= \frac{1}{2}\alpha \cdot 2\beta + \frac{1}{2}\alpha \cdot 2\gamma \\
&= \frac{1}{2}f(2\beta) + \frac{1}{2}f(2\gamma) && \text{ορισμός της } f \\
&= f\left(\frac{1}{2}2\beta + \frac{1}{2}2\gamma\right) && \text{γραμμικότητα της } f \\
&= f(\beta + \gamma)
\end{aligned}
$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$
\begin{aligned}
f(\beta) + f(\gamma) &= f(\beta + \gamma) \\
\Leftrightarrow \alpha\beta + \alpha\gamma &= \alpha(\beta + \gamma)
\end{aligned}
$$

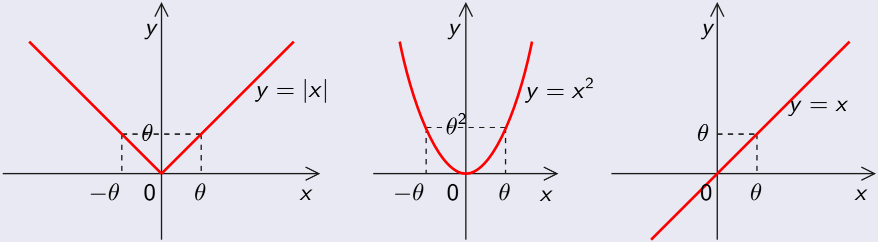
$\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ ή $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$;

Αναζητώντας την όμοια καμπύλη στην $y = |x|$.



$\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ ή $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$;

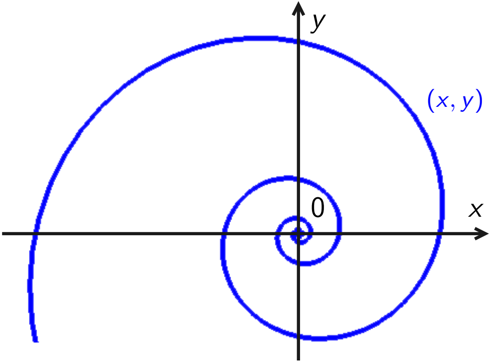
$x^2 = \theta^2 \Leftrightarrow |x| = \theta, \ldots$



Τριώνυμο	Απόλυτα
$x^2 = \theta^2 \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$	$\|x\| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
$x^2 < \theta^2 \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$	$\|x\| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$
$x^2 > \theta^2 \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$	$\|x\| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$

Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

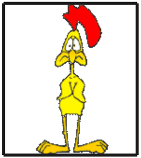
Λογαριθμική σπείρα.

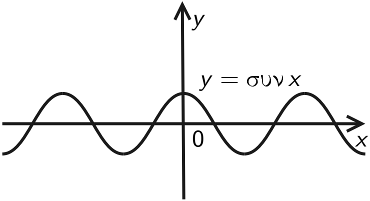


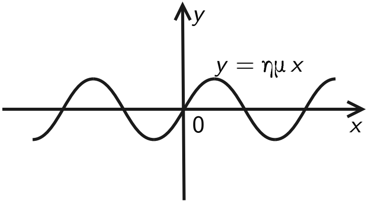
$$(x, y) = \left(\alpha^{\theta}\, \sigma\upsilon\nu\, \theta, \alpha^{\theta}\, \eta\mu\, \theta\right)$$

Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί.

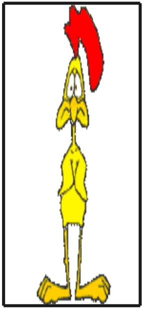


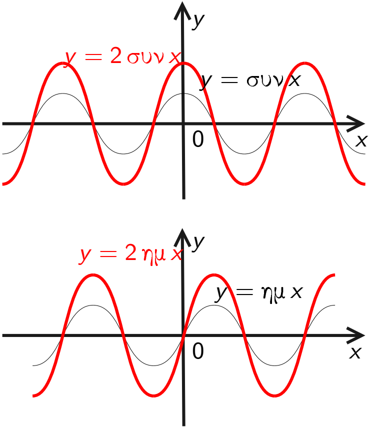




Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

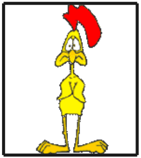
Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί.

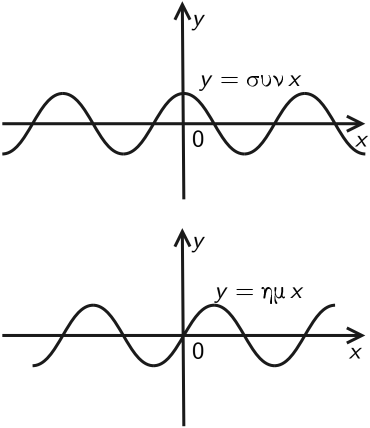




Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

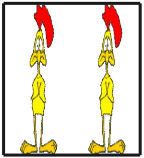
Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί.

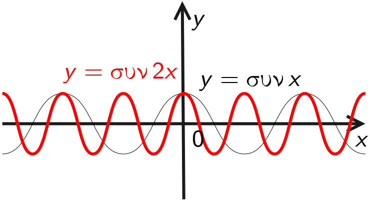


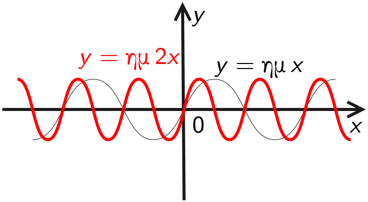


Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί.







Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Εκθετική συνάρτηση
$f(x) = \alpha^x$

$$\begin{aligned} c\,f(x) &= c\,\alpha^x \\ &= \alpha^{\log_\alpha c} \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^C \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^{C+x} \\ &= f(C+x) \end{aligned}$$

Λογαριθμική συνάρτηση
$f(x) = \log_\alpha x$

$$\begin{aligned} f(c\,x) &= \log_\alpha (c\,x) \\ &= \log_\alpha c + \log_\alpha x \\ &= C + \log_\alpha x \\ &= C + f(x) \end{aligned}$$

Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$

$$\begin{aligned} c\,f(x) &= c\,\alpha^x \\ &= \alpha^{\log_\alpha c} \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^C \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^{C+x} \\ &= f(C+x) \end{aligned}$$

Λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$

$$\begin{aligned} f(c\,x) &= \log_\alpha (c\,x) \\ &= \log_\alpha c + \log_\alpha x \\ &= C + \log_\alpha x \\ &= C + f(x) \end{aligned}$$

Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$

$$\begin{aligned} c\,f(x) &= c\,\alpha^x \\ &= \alpha^{\log_\alpha c} \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^C \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^{C+x} \\ &= f(C+x) \end{aligned}$$

Λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$

$$\begin{aligned} f(c\,x) &= \log_\alpha(c\,x) \\ &= \log_\alpha c + \log_\alpha x \\ &= C + \log_\alpha x \\ &= C + f(x) \end{aligned}$$

Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Εκθετική συνάρτηση
$f(x) = \alpha^x$

$$\begin{aligned} c\,f(x) &= c\,\alpha^x \\ &= \alpha^{\log_\alpha c} \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^C \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^{C+x} \\ &= f(C+x) \end{aligned}$$

Λογαριθμική συνάρτηση
$f(x) = \log_\alpha x$

$$\begin{aligned} f(c\,x) &= \log_\alpha(c\,x) \\ &= \log_\alpha c + \log_\alpha x \\ &= C + \log_\alpha x \\ &= C + f(x) \end{aligned}$$

Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Εκθετική συνάρτηση
$f(x) = \alpha^x$

$$\begin{aligned} c\,f(x) &= c\,\alpha^x \\ &= \alpha^{\log_\alpha c} \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^C \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^{C+x} \\ &= f(C+x) \end{aligned}$$

Λογαριθμική συνάρτηση
$f(x) = \log_\alpha x$

$$\begin{aligned} f(c\,x) &= \log_\alpha(c\,x) \\ &= \log_\alpha c + \log_\alpha x \\ &= C + \log_\alpha x \\ &= C + f(x) \end{aligned}$$

Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Εκθετική συνάρτηση
$f(x) = \alpha^x$

$$\begin{aligned} c\,f(x) &= c\,\alpha^x \\ &= \alpha^{\log_\alpha c} \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^C \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^{C+x} \\ &= f(C+x) \end{aligned}$$

Λογαριθμική συνάρτηση
$f(x) = \log_\alpha x$

$$\begin{aligned} f(c\,x) &= \log_\alpha(c\,x) \\ &= \log_\alpha c + \log_\alpha x \\ &= C + \log_\alpha x \\ &= C + f(x) \end{aligned}$$

Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Εκθετική συνάρτηση
$f(x) = \alpha^x$

$$\begin{aligned} c\,f(x) &= c\,\alpha^x \\ &= \alpha^{\log_\alpha c} \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^C \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^{C+x} \\ &= f(C+x) \end{aligned}$$

Λογαριθμική συνάρτηση
$f(x) = \log_\alpha x$

$$\begin{aligned} f(c\,x) &= \log_\alpha (c\,x) \\ &= \log_\alpha c + \log_\alpha x \\ &= C + \log_\alpha x \\ &= C + f(x) \end{aligned}$$

Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Εκθετική συνάρτηση
$f(x) = \alpha^x$

$$\begin{aligned} c\,f(x) &= c\,\alpha^x \\ &= \alpha^{\log_\alpha c} \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^C \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^{C+x} \\ &= f(C+x) \end{aligned}$$

Λογαριθμική συνάρτηση
$f(x) = \log_\alpha x$

$$\begin{aligned} f(c\,x) &= \log_\alpha(c\,x) \\ &= \log_\alpha c + \log_\alpha x \\ &= C + \log_\alpha x \\ &= C + f(x) \end{aligned}$$

Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Εκθετική συνάρτηση
$f(x) = \alpha^x$

$$\begin{aligned} c\,f(x) &= c\,\alpha^x \\ &= \alpha^{\log_\alpha c} \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^C \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^{C+x} \\ &= f(C+x) \end{aligned}$$

Λογαριθμική συνάρτηση
$f(x) = \log_\alpha x$

$$\begin{aligned} f(c\,x) &= \log_\alpha(c\,x) \\ &= \log_\alpha c + \log_\alpha x \\ &= C + \log_\alpha x \\ &= C + f(x) \end{aligned}$$

Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Εκθετική συνάρτηση
$f(x) = \alpha^x$

$$
\begin{aligned}
c\,f(x) &= c\,\alpha^x \\
&= \alpha^{\log_\alpha c} \cdot \alpha^x \\
&= \alpha^C \cdot \alpha^x \\
&= \alpha^{C+x} \\
&= f(C+x)
\end{aligned}
$$

Λογαριθμική συνάρτηση
$f(x) = \log_\alpha x$

$$
\begin{aligned}
f(c\,x) &= \log_\alpha (c\,x) \\
&= \log_\alpha c + \log_\alpha x \\
&= C + \log_\alpha x \\
&= C + f(x)
\end{aligned}
$$

Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Εκθετική συνάρτηση
$f(x) = \alpha^x$

$$\begin{aligned} c\,f(x) &= c\,\alpha^x \\ &= \alpha^{\log_\alpha c} \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^C \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^{C+x} \\ &= f(C+x) \end{aligned}$$

Λογαριθμική συνάρτηση
$f(x) = \log_\alpha x$

$$\begin{aligned} f(c\,x) &= \log_\alpha(c\,x) \\ &= \log_\alpha c + \log_\alpha x \\ &= C + \log_\alpha x \\ &= C + f(x) \end{aligned}$$

Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Εκθετική συνάρτηση
$f(x) = \alpha^x$

$$\begin{aligned} c\,f(x) &= c\,\alpha^x \\ &= \alpha^{\log_\alpha c} \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^C \cdot \alpha^x \\ &= \alpha^{C+x} \\ &= f(C+x) \end{aligned}$$

Λογαριθμική συνάρτηση
$f(x) = \log_\alpha x$

$$\begin{aligned} f(c\,x) &= \log_\alpha(c\,x) \\ &= \log_\alpha c + \log_\alpha x \\ &= C + \log_\alpha x \\ &= C + f(x) \end{aligned}$$

- Keith Devlin, *The Millennium Problems - The seven greatest unsolved mathmatical puzzles of our time*, Granta Books, 2005.
- M. Gardner, *About three types of spirals and how to construct them*, Mathematical Games, Scientific American, Apr. 1962, V 206, No 4.
- Richard Mankiewicz, *Η ιστορία των μαθηματικών*, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, 2002.
- V.M. Tikhomirov, *Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα*, εκδόσεις Κάτοπτρο, 1999.
- Carol Vorderman, *Ανακαλύπτω τα Μαθηματικά*, εκδόσεις Ερευνητές, 1998.

- Σωκράτης Ντριάνκος, *Συναρτήσεις*, http://users.auth.gr/~lemonidi/sde_yliko/paradigmata.htm
- Μπάμπης Τουμάσης, *Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των Μαθηματικών*, εκδόσεις Κωστόγιαννος, Χαλκίδα, 1999.

σας ευχαριστώ!

http://users.ira.sch.gr/iriniper