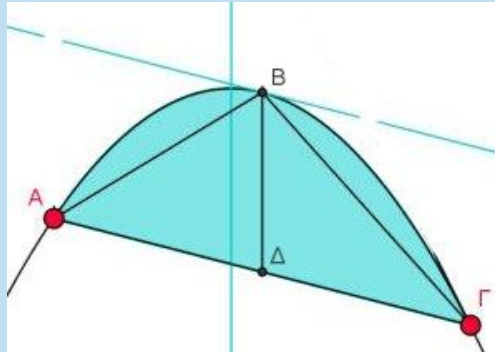


Απόδειξη των δύο βασικών σχέσεων



Πρόταση 1. Αν το B είναι η κορυφή του παραβολικού τμήματος με βάση το ΑΓ (δηλαδή η εφαπτομένη στο B είναι παράλληλη με την ΑΓ) και το ΒΔ είναι παράλληλο στον άξονα συμμετρίας της παραβολής, τότε το Δ είναι το μέσο του ΑΓ.

Απόδειξη: Σε σύστημα συντεταγμένων έστω ότι η παραβολή δίνεται από την εξίσωση $f(x) = ax^2 + bx + c$ τότε οι συντεταγμένες για τα σημεία A, B και Γ είναι $A(x_1, f(x_1))$, $B(\xi, f(\xi))$, $\Gamma(x_2, f(x_2))$.

Επειδή η εφαπτομένη στο B είναι παράλληλη στο ΑΓ η κλίση της που είναι $f'(\xi)$ θα ισούται με την κλίση της ΑΓ:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

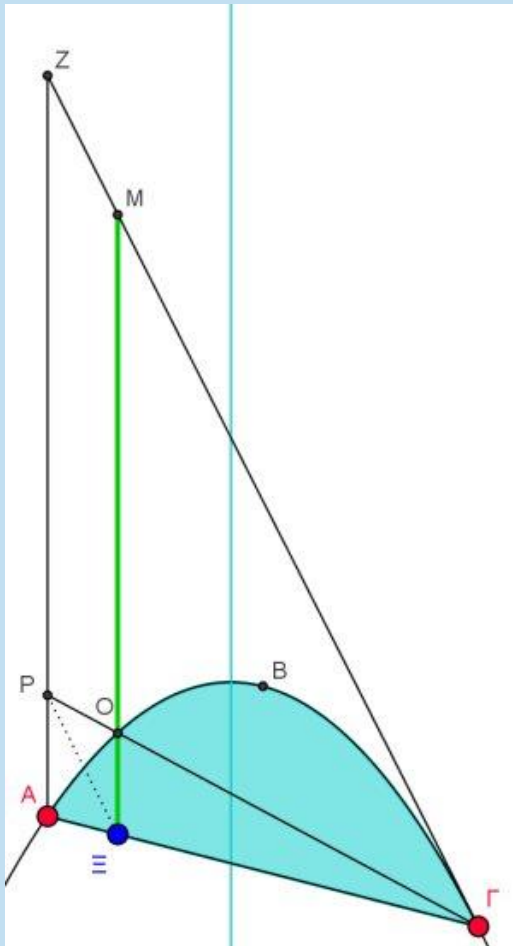
Δηλαδή,

$$2a\xi + b = \frac{a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Leftrightarrow 2a\xi + b = a(x_1 + x_2) + b$$

$$\Leftrightarrow \xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Επομένως το Δ είναι μέσο του ΑΓ.



Πρόταση 2. Στο σχήμα δίπλα, η ΖΓ είναι η εφαπτομένη στο Γ και η ΑΖ παράλληλη στον άξονα συμμετρίας της παραβολής. Από τυχαίο σημείο Ξ του ΑΓ φέρνουμε παράλληλη στον άξονα συμμετρίας της παραβολής που τέμνει την παραβολή στο Ο και την ΑΓ στο Μ. Τότε:

$$\frac{\Xi O}{\Xi M} = \frac{A \Xi}{A \Gamma}$$

Απόδειξη: Φέρνουμε την ΓΟ που τέμνει το ΑΖ στο Ρ.

Λόγω των παραλλήλων ΑΖ // ΞΜ που τέμνονται από τις ΑΓ, ΡΓ και ΖΓ θα έχουμε την ισότητα των λόγων:

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma \Xi} = \frac{\Gamma P}{\Gamma O} = \frac{\Gamma Z}{\Gamma M}$$

Επομένως, αν θεωρήσουμε ομοιοθεσία με κέντρο το Γ και λόγο $\frac{\Gamma A}{\Gamma \Xi}$ θα είναι:

- Το Α ομοιόθετο του Ξ
- Το Ρ ομοιόθετο του Ο και
- Το Ζ ομοιόθετο του Μ

Επομένως, θα είναι και το ΑΖ ομοιόθετο του ΞΜ και το ΑΡ ομοιόθετο του ΞΟ, δηλαδή θα ισχύει ότι:

$$\frac{AZ}{\Xi M} = \frac{AP}{\Xi O} \Leftrightarrow \frac{\Xi O}{\Xi M} = \frac{AP}{AZ} \quad (1)$$

Ακόμα, οι ΡΞ και ΖΓ είναι παράλληλες (αυτό θέλει δουλίτσα, αλλά μπορεί να αποδειχθεί με τη χρήση καρτεσιανών συντεταγμένων όπως και πριν)

Επομένως από το Θεώρημα του Θαλή παίρνουμε,

$$\frac{AP}{AZ} = \frac{A \Xi}{A \Gamma} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) καταλήγουμε στο ζητούμενο:

$$\frac{\Xi O}{\Xi M} = \frac{A \Xi}{A \Gamma}$$

Πόρισμα: Αν το Ξ είναι μέσο της ΑΓ τότε και το Ο είναι μέσο της ΞΜ.

Αυτό σημαίνει ότι αν φέρουμε από την κορυφή Β του παραβολικού τμήματος την παράλληλο στον άξονα συμμετρίας της παραβολής, αυτή θα τέμνει το ΑΓ στο μέσο του Δ (Πρόταση 1) και το ΓΖ στο Ε, έτσι ώστε **το Β να είναι μέσο του ΔΕ** (πρόταση 2).