Προσεγγίζοντας την έννοια της συνάρτησης στο Γυμνάσιο και το Λύκειο.

Ειρήνη Περυσινάκη*
iriniper@sch.gr

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία
Παράρτημα Ηρακλείου

16 Φεβρουαρίου 2008

Περίληψη

Η έννοια της συνάρτησης διαμορφώθηκε μέσα από πολλές αντιπαραθέσεις πολλών δεκαετιών. Χρησιμοποιήθηκε και χρησιμοποιείται για να περιγράψει μεταβολές, διαδικασίες, αντιστοιχίες. Πρόκειται για ένα εξαιρετικά πολύπλευρο αντικείμενο, με γεωμετρικά και αλγεβρικά στοιχεία (και όχι μόνο) με εφαρμογές σχεδόν σε όλες τις επιστήμες. Μελετώντας τη, κατανοούμε περισσότερο το πώς αυτή συντέλεσε στην προαγωγή της λογικής μας και τη διαμόρφωση μεθόδων για την επίλυση δύσκολων προβλημάτων (όπως τα προβλήματα βελτιστοποίησης). Η προσέγγιση γίνεται μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα, σχεδιασμένα για την όσο το δυνατόν μεγαλύτερη κινητοποίηση του ενδιαφέροντος των μαθητών.

Περιεχόμενα

*Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ηρακλείου

1 Ιστορική αναδρομή

1.1 Τι είναι συνάρτηση;

Αυτή η γενική έννοια απαιτεί με τον όρο συνάρτηση του x να εννοούμε τον αριθμό που δίνεται για κάθε x και ο οποίος μεταβάλλεται σταδιακά μαζί με το x. Η τιμή μιας συνάρτησης μπορεί να ορίζεται από κάποια αναλυτική έκφραση ή από μια συνθήκη που παρέχει τη δυνατότητα να δοκιμάσουμε όλους τους αριθμούς και να επιλέξουμε έναν από αυτούς ή, τέλος, η εξάρτηση ενδέχεται να υπάρχει και να παραμένει άγνωστη.

Η γενική μορφή της θεωρίας δέχεται την ύπαρξη μιας εξάρτησης μόνον υπό την έννοια ότι οφείλουμε να νοούμε τους σχετιζόμενους αριθμούς ως δεδομένους ομού.

N.I. Lobačevskiĭ

Στο βιβλίο [4, κεφάλαιο 9] του V.M. Tikhomirov βρίσκουμε την εξής ιστορική αναφορά για τη γέννηση της έννοιας της συνάρτησης:

> …Τις πρώτες προσπάθειες για να σκιαγραφηθεί το περίγραμμα της έννοιας της συνάρτησης τις κατέβαλαν στα τέλη του 17ου αιώνα ο Leibniz και ο Johann Bernoulli. Τον όρο «συνάρτηση» εισήγαγε ο Leibnitz. Ο Bernoulli συνέδεσε με αυτό τον όρο την ιδέα «μιας έκφρασης που κατασκευάζεται με ορισμένο τρόπο από ένα μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές». Αργότερα, ο Euler κατέστησε περισσότερο απτή την ιδέα του Bernoulli, ορίζοντας στα εγχειρίδιά του τη συνάρτηση ως *μιαν αναλυτική έκφραση κατασκευασμένη από ένα μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές*. Μάλιστα εισήγαγε και το συμβολισμό $f(x)$. Ο Euler δέχτηκε ότι είναι δυνατόν να ονομαστεί συνάρτηση «κάθε ελεύθερα σχεδιασμένη καμπύλη» και είχε υπόψη του περιπτώσεις συναρτήσεων—για παράδειγμα, τη συνάρτηση του ημιτόνου—που μπορεί να περιγραφούν λεκτικά…

Το τι είναι συνάρτηση, απασχόλησε για πολλές δεκαετίες τη μαθηματική κοινότητα. Στις αρχές του 19ου αιώνα ο Lobačevskiĭ όρισε τη συνάρτηση ως *αντιστοιχία*—όπως δηλαδή έχει επικράτησει μέχρι και τις μέρες μας.

Έτσι, και στα σημερινά σχολικά βιβλία δίνεται ο εξής ορισμός της συνάρτησης, χρησιμοποιώντας συνολοθεωρητική «γλώσσα»:

Η (σχέση) f λέγεται συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο X και τιμές από το σύνολο Y αν σε κάθε στοιχείο x του συνόλου X (η σχέση f) αντιστοιχίζει ένα μοναδικό στοιχείο y του συνόλου Y. Αυτό το μοναδικό y λέγεται εικόνα του x και συμβολίζεται με $f(x)$. Γράφουμε δηλαδή $y = f(x)$.

1.2 Το «βασίλειο» των συναρτήσεων.

Με βάση λοιπόν τον προηγούμενο ορισμό, θα τολμούσαμε να πούμε ότι οι συναρτήσεις είναι αντικείμενα της Θεωρίας Συνόλων.

Εντούτοις, θέματα όπως το όριο, η συνέχεια, η σύγκλιση και η ομοιόμορφη σύγκλιση συναρτήσεων, κ.α., έδωσαν την αφορμή για να γεννηθεί ένας νέος κλάδος των Μαθηματικών—το κατεξοχήν «βασίλειο» της συνάρτησης—η Ανάλυση.

Όπως περιγράφεται και στο [3], η ανάγκη να επινοηθούν μέθοδοι επίλυσης αλγεβρικών εξισώσεων οδήγησε σε ένα συνδυασμό Άλγεβρας και Γεωμετρίας. Ήδη, από τον 11ο μ.Χ. αιώνα ο Ομάρ Χαγιάμ ανακάλυψε μια γεωμετρική μέθοδο επίλυσης εξισώσεων τρίτου βαθμού μέσω της εύρεσης των σημείων τομής δύο κωνικών τομών.

Αργότερα, με την επινόηση του καρτεσιανού επιπέδου, κάθε αλγεβρική παράσταση μπόρεσε να μεταμορφωθεί σε καμπύλη. Έκτοτε, το γεωμετρικό ανάλογο για παράδειγμα του x^2 δεν είναι το τετράγωνο πλευράς x, αλλά η παραβολή. Αυτό ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο για τη «μετάφραση» γεωμετρικών ιδιοτήτων μιας καμπύλης σε αλγεβρικές σχέσεις. Για παράδειγμα, κάτι τέτοιο ήταν απαραίτητο για τη μελέτη των τροχιών των πλανητών.

Ο Νεύτωνας ήταν εκείνος που στην προσπάθειά του να διαμορφώσει ένα μαθηματικό μοντέλο της μηχανικής, μίλησε πρώτος για ρυθμούς μεταβολής ποσοτήτων ή ροές όπως τις ονόμασε (δηλαδή τις σημερινές παραγώγους). Νωρίτερα και ο Pier de Fermat είχε ασχοληθεί με τις εξισώσεις εφαπτομένων σε πολυωνυμικές καμπύλες. Όμως οι «πατέρες» του Διαφορικού Λογισμού θεωρούνται ο Νεύτωνας και ο Leibnitz. Μάλιστα στον δεύτερο αποδίδονται και οι όροι «διαφορικός λογισμός», «ολοκληρωτικός λογισμός» όπως και τα σύμβολα dy/dx και $\int dx$.

Ας σημειώσουμε λοιπόν ότι πριν πάρει τη μορφή αντιστοιχίας, η συνάρτηση προϋπήρχε στις φυσικές επιστήμες ως διαδικασία ή μεταβολή. Κατανοούμε έτσι και γιατί είναι ένα τόσο πολύπλευρο αντικείμενο που χρησιμποποιείται από πολλούς επιστημονικούς κλάδους. Ως τέτοιο θα πρέπει και να την προσεγγίσουμε, έχοντας καλά στο νου μας ότι αν και διακρίνουμε σ' αυτή γεωμετρικά ή αλγεβρικά στοιχεία δεν περιορίζεται σ' αυτά.

2 Η έννοια της συνάρτησης

Αν ζητήσουμε από τους μαθητές μας να δώσουν ένα δικό τους παράδειγμα συνάρτησης, το πιο πιθανόν είναι να μας δώσουν μόνο έναν αλγεβρικό τύπο. Φαίνεται λοιπόν πως ο ορισμός της συνάρτησης κατά τον Bernoulli (δηλαδή ως αναλυτική έκφραση κατασκευασμένη από μεταβλητό μέγεθος και σταθερές) έχει επικρατήσει στη συνείδηση των μαθητών μας και ίσως και τη δική μας.

Σίγουρα όμως θα επιθυμούσαμε, τουλάχιστον σε ενα αρχικό στάδιο, να σκιαγραφήσουμε μέσα από τα κατάλληλα παραδείγματα τις διάφορες «μορφές» μιας συνάρτησης. Αυτός είναι και ο στόχος της παρούσας εργασίας.

2.1 Μεταβολές

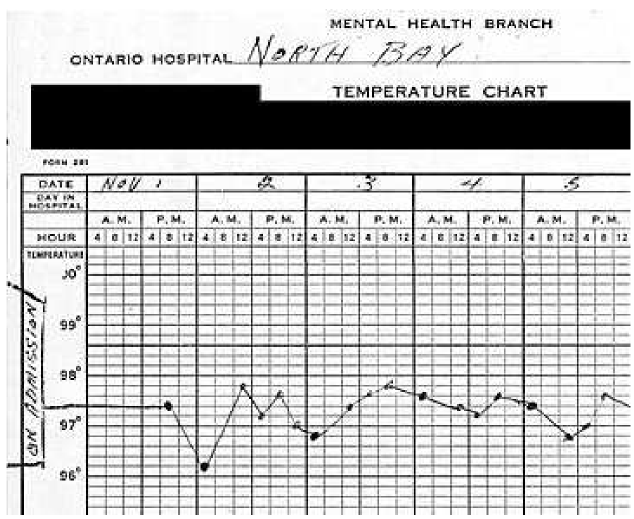
Όπως αναφέρθηκε και στην ιστορική αναδρομή, η συνάρτηση συχνά παίρνει τη μορφή της μεταβολής. Τέτοια παραδείγματα μας προσφέρει πλούσια η Φυσική, όπως τη μεταβολή του διαστήματος που διανύει ένα κινητό σημείο με την πάροδο του χρόνου, ή τη μεταβολή της ταχυτητάς του, τη μεταβολή του ηλεκτρικού φορτίου ενός πυκνωτή κ.τ.λ. Ομοίως, και άλλες επιστήμες όπως η Ιατρική, η Κοινωνιολογία, η Βιολογία, ..., ενδιαφέρονται για τη μεταβολή διαφόρων μεγεθών που μελετούν. (για παράδειγμα, η Ιατρική θα ενδιαφερόταν να μελετήσει τη μεταβολή του επιπέδου ζακχάρου ενός οργανισμού σε σχέση με την εκρινόμενη ινσουλίνη). Φυσικά, δεν είναι μόνο η μεταβολή, αλλά και ο ρυθμός μεταβολής (παράγωγος) που απασχολεί.

Γιατί όμως θα ήταν ενδιαφέρον να ασχοληθούμε με τέτοια παραδείγματα στο μάθημα των μαθηματικών; Η απάντηση έρχεται μέσω του ακόλουθου παραδείγματος:

2.1.1 Παράδειγμα: Πυρετικό Διάγραμμα.

Στα μαθηματικά του Γυμνασίου εξετάζονται δύο κλασικές περιπτώσεις μεταβολών: Τα ανάλογα και τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Ώστόσο, αν δεν επιθυμούμε να συνδέσουμε τη μεταβολή με κάποιο κανόνα, θα μπορούσαμε να δώσουμε το ακόλουθο παράδειγμα, με αρκετά πλεονεκτήματα όπως θα δούμε:



Σχήμα 1: Πυρετικό Διάγραμμα

Παρουσιάζουμε στους μαθητές μας ένα πυρετικό διάγραμμα όπως στο σχήμα 1 (κάτι σχετικά οικείο σ' αυτούς) και θέτουμε ερωτήσεις όπως:

- Τι παριστάνει το σχέδιο;
- Γνωρίζετε μήπως τι κάνει μια νοσοκόμα για να σχεδιάσει τη γραμμή αυτή;

- Για ποιο λόγο προτιμάται ο σχεδιασμός μιας γραμμής από την απλή καταγραφή της θερμοκρασίας αριθμητικά;
- Σε ποια χρονικά διαστήματα η θερμοκρασία του ασθενούς αυξάνει και σε ποια μειώνεται;
- Μπορείτε να εκτιμήσετε τη θερμοκρασία του ασθενούς στις 3 Νοεμβρίου και ώρα 8π.μ.;

Φυσικά, το παράδειγμα αναφέρεται στη συνάρτηση

$$\text{χρονική στιγμή} \;\rightarrow\; \text{θερμοκρασία ασθενούς}$$

που δεν καθορίζεται από κάποιον κανόνα-τύπο. Ακριβώς γι' αυτό, προβάλλονται περισσότερο τα στοιχεία του γραφήματος μιας συνάρτησης όπως:

- Η έννοια της συνέχειας: Η μεταβολή από τη μία θερμοκρασία στην άλλη γίνεται με συνεχή τρόπο (ίσως όχι «ομαλό») μεσολαβώντας όλες οι ενδιάμεσες τιμές.
- Προσεγγιστικές διαδικασίες: Εκτίμηση της θερμοκρασίας σε στιγμές που δεν έγινε μέτρηση.
- Διαστήματα μονοτονίας.

Και ας μην ξεχνάμε ότι καθετί που προβληματίζει και ωθεί τους μαθητές να εξάγουν τα δικά τους συμπεράσματα είναι ούτως ή άλλως ωφέλιμο από παιδαγωγική άποψη.

2.2 Διαδικασίες

Όπως αναφέραμε, η συνάρτηση είναι μια αντιστοιχία από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y, με την οποία σε κάθε στοιχείο $x \in X$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό $y \in Y$.

Συχνά αυτή η αντιστοιχία δε γίνεται άμεσα, αλλά με ενδιάμεσα στάδια. Ακολουθούν παραδείγματα που ενισχύουν αυτή τη θέση.

2.2.1 Μαντεύοντας έναν αριθμό.

Οι μικροί μαθητές του Γυμνασίου εντυπωσιάζονται με το ακόλουθο «παιχνίδι»:

Μαντεύοντας έναν αριθμό (βήματα)	Η μαθηματική ερμηνεία
Βάλε έναν αριθμό στο νου σου.	x
Βάλε και για το φίλο σου άλλα τόσα.	$2x$
Βάλε και για μένα 10.	$2x + 10$
«Ρίξε» τα μισά στη θάλασσα.	$\frac{1}{2}(2x + 10)$
Δώσε πίσω στο φίλο σου τα δικά του.	$\frac{1}{2}(2x + 10) - x$
5 δε σου έμειναν;	$= 5$

Το εντυπωσιακό σ' αυτό το απλό παράδειγμα είναι ότι ανεξάρτητα από τον αριθμό εισαγωγής x, το τελικό αποτέλεσμα είναι πάντα ο αριθμός 5. Πρόκειται δηλαδή για παράδειγμα σταθερής συνάρτησης.

Η σταθερή συνάρτηση αποτελεί πρόσκομμα για τους μικρούς μαθητές: *Πώς μπορεί να λέγεται συνάρτηση κάτι που δεν έχει μεταβλητή; Ποια η διαφορά από έναν αριθμό;* Φυσικά το δίκιο είναι με το μέρος των παιδιών, μια και «εξαρτημένη» μεταβλητή δεν εξαρτάται καθόλου από την ανεξάρτητη. Ενώ λοιπόν μία έκφραση της μορφής $f(x) = 5$ συγχέεται εύκολα με τον αριθμό 5, το συγκεκριμένο παράδειγμα «πείθει» για την ύπαρξη σταθερών συναρτήσεων: Η *διαδικασία* αναγνωρίζεται ευκολότερα ως *μορφή αντιστοιχίας*.

Τέλος να αναφέρουμε και δυο-τρία επιπλέον πλεονεκτήματα του «παιχνιδιού» μας.

1. Κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών και δημιουργεί ευχάριστη ατμόσφαιρα στην τάξη, διαμορφώνοντας θετικές στάσεις προς τα Μαθηματικά.

2. Ωθεί τους μαθητές σε διερευνητική διαδικασία. Επιθυμώντας να απαντήσουν στο ερώτημα *πού οφείλεται το σταθερό αποτέλεσμα*, επιχειρούν τη «μαθηματική μετάφραση».

3. Οδηγούνται σε γενικεύσεις: Στη θέση του αριθμού 10 θα μπορούσε να μπει ένας οποιοσδήποτε αριθμός με ανάλογα αποτελέσματα.

4. Οι πιο προικισμένοι μαθητές ίσως ανιχνεύσουν την ιδιότητα της παραμέτρου για τον αριθμό 10. Το συγκεκριμένο παράδειγμα επομένως, αποτελεί και παράδειγμα *παραμετρικών συναρτήσεων*.

2.2.2 Η σύνθεση συναρτήσεων και η συμπλήρωση τετραγώνου στο τριώνυμο.

Όταν διδάσκουμε τη σύνθεση των συναρτήσεων, ουσιαστικά ζητάμε από τους μαθητές μας να αναγνωρίσουν τα βήματα μιας διαδικασίας. Για παράδειγμα, αν τους δώσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \text{ημ}\left(e^{x^2+1}\right)$, περιμένουμε να αναγνωρίσουν την εξής διαδικασία:

Θεωρούμε κάποιον αριθμό x.
Παίρνουμε το τετράγωνο του x.
Στο τετράγωνο του x προσθέτουμε τη μονάδα.
Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση με βάση το e και εκθέτη την προηγούμενη έκφραση.
Παίρνουμε το ημίτονο της προηγούμενης έκφρασης.

Ήδη από την Α΄ Λυκείου οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τέτοιου είδους διαδικασίες, όταν εφαρμόζεται η μέθοδος της συμπλήρωσης του τετραγώνου στο τριώνυμο, με σκοπό τόσο την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, όσο και τη γραφική απεικόνιση της συνάρτησης.

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο σε ένα τριώνυμο, ουσιαστικά εξαλείφομε τον πρωτοβάθμιο όρο. Έτσι το τριώνυμο $f(x) = x^2 + 2x + 3$ μετασχηματίζεται στο $f(x) = (x+1)^2 + 2$. Οι δύο ισοδύναμες εκφράσεις υποδεικνύουν δύο διαφορετικές διαδικασίες, τις

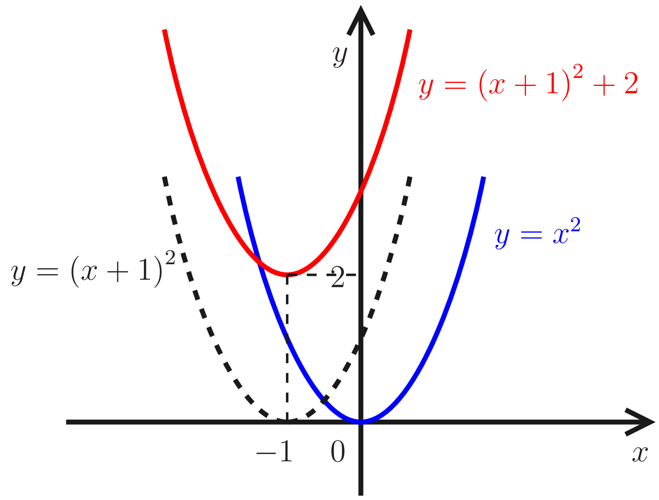
$$x \to x^2 \to x^2 + 2x \to x^2 + 2x + 3$$

και

$$x \to x + 1 \to (x+1)^2 \to (x+1)^2 + 2$$

Η δεύτερη όμως έχει το εξής πλεονέκτημα: κάθε βήμα της μεταφράζεται σε συγκεκριμένο γεωμετρικό μετασχηματισμό στο καρτεσιανό επίπεδο. Έτσι, κατανοούμε και γιατί το γράφημα της $f(x) = (x+1)^2 + 2$ είναι απλώς μια μετατόπιση του γραφήματος της $g(x) = x^2$, όπως απεικονίζεται και στο σχήμα 2.

Όπως πολύ εύστοχα επεσήμανε και ο συνάδελφος Παπαντωνάκης Νίκος, Φυσικός στο 11ο Λύκειο Ηρακλείου, οι τύποι αποτετραγωνισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων παίζουν ανάλογο ρόλο με τη συμπλήρωση τετραγώνου.



Σχήμα 2: Απεικόνιση τριωνύμου με χρήση της συμπλήρωσης τετραγώνου.

Ένα θέμα που συναντάται και στη Φυσική του Λυκείου, είναι η γραφική απεικόνιση της συνάρτησης $f(x) = \text{συν}^2 x$: Αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι

$$\text{συν}^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\text{συν}\, 2x}{2},$$

επομένως και εδώ, το γράφημα της εν λόγω συνάρτησης είναι απλώς μια μετατόπιση του γραφήματος της $g(x) = \frac{\text{συν}\, 2x}{2}$ που και αυτό με τη σειρά του είναι ομοιόθετο της $y = \text{συν}\, x$ (δείτε και το σχήμα 12).

2.2.3 Άπειρες διαδικασίες

Μια από τις δυσκολίες που παρουσιάζει ο χειρισμός και η κατανόηση της εκθετικής συνάρτησης με βάση τον e, είναι ο ίδιος ο αριθμός e. Είναι υπερβατικός και μπορούμε να τον νοήσουμε μόνο ως όριο. Επομένως και η αλγεβρική έκφραση e^x, ακόμα και για x φυσικό αριθμό, είναι στην ουσία ένα *όριο*. Ποιο; Υπάρχουν διάφορες απαντήσεις όπως

$$e^x = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

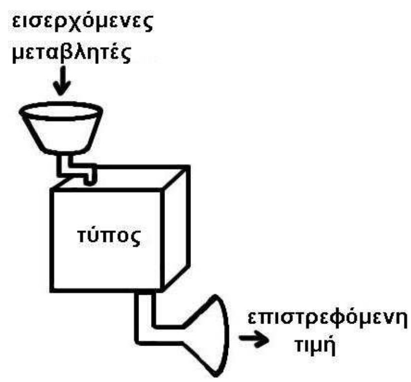
ή

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Η τελευταία έκφραση θα μπορούσε να θεωρηθεί σαν κάποια μορφή άπειρης διαδικασίας. Παρόλο που δεν προβλέπεται από το Υπουργείο η συγκεκριμένη αναφορά, «απαντά» αρκετά ικανοποιητικά στις ερωτήσεις των πιο «περίεργων» μαθητών μας. (Αν θέλετε, η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ πείθει καλύτερα για τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της εκθετικής, $f'(x) = f(x)$ και $f(0) = 1$.)

2.3 Κανόνες αντιστοίχησης

Ερχόμαστε τώρα στην πιο «οικία» μορφή συνάρτησης, που είναι η αντιστοίχηση με βάση κάποιο κανόνα—συνήθως κάποιον αλγεβρικό τύπο. Συχνά, θέλοντας να σκιαγραφήσουμε τον ρόλο του τύπου μιας συνάρτησης, παρουσιάζουμε στους μαθητές μας μια εικόνα όπως το σχήμα 3.



Σχήμα 3: Η «μηχανή» της συνάρτησης.

Το συγκεκριμένο αντικείμενο προσφέρεται και για «παιχνίδι ρόλων», όπως προτείνεται και στο [5, κεφάλαιο 3]: Κάποιος μαθητής υποδύεται το ρόλο της «μηχανής», κρατώντας μυστικό τον τύπο της συνάρτησης. Οι υπόλοιποι συμμαθητές του, εισάγουν στη μηχανή διάφορες τιμές (τα x) και εκείνος τους επιστρέφει τα αντίστοιχα $f(x)$. Το ζητούμενο είναι να μαντέψει κάποιος τον τύπο της συνάρτησης, οπότε και θα πάρει με τη σειρά του το ρόλο της μηχανής. Στο παιχνίδι αυτό μπορεί να εφαρμοστεί και η εξής παραλλαγή: Η μηχανή «φιλτράρει» τις εισαγόμενες τιμές και δε δέχεται κάποιες συγκεκριμένες (για παράδειγμα εκείνες που είναι μεγαλύτερες από 20). Με αυτόν τον τρόπο γίνεται και η εισαγωγή στο Πεδίο Ορισμού μιας συνάρτησης και στον ρόλο που παίζουν οι περιορισμοί στους τύπους.

Ιστορικό σχόλιο

Η ισότητα των συναρτήσεων προϋποθέτει ισότητα στο Πεδίο Ορισμού, στο Πεδίο Τιμών και στον αλγεβρικό τύπο-κανόνα αντιστοίχησης. Η ιστορία διδάσκει ότι τίποτα από όλα αυτά δεν είναι προφανές. Θα αναφέρω μία περίπτωση όπου η ισότητα στον τύπο των συναρτήσεων αποτέλεσε ένα ιδιαίτερα βαρυσήμαντο θεώρημα της Θεωρίας Αριθμών:

Αναφέρομαι στη ζ συνάρτηση του Euler[1], που ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμο x και έχει τύπο

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots$$

Ο Euler απέδειξε ότι η ίδια συνάρτηση περιγράφεται και από έναν δεύτερο τύπο:

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-(1/2)^x} \times \frac{1}{1-(1/3)^x} \times \frac{1}{1-(1/5)^x} \times \frac{1}{1-(1/7)^x} \times \cdots$$

όπου το γινόμενο των όρων $\frac{1}{1-(1/p)^x}$ υπολογίζεται σε όλους τους πρώτους αριθμούς p.

Παρακάτω ακολουθούν συγκεκριμένα παραδείγματα που «φωτίζουν» διάφορες πλευρές της λειτουργικότητας του τύπου μιας συνάρτησης.

2.3.1 Το «εικονικό» εστιατόριο

Το *«εικονικό» εστιατόριο* είναι εμπνευσμένο από το συνάδελφο Σωκράτη Ντριάνκο, μαθηματικό του Σχολείου Δεύτερης Ευκαιρίας Νεαπόλεως Θεσσαλονίκης. Όταν το έλαβα, πραγματικά ενθουσιάστηκα. Με ιδιαίτερα μεθοδευμένο τρόπο, ωθεί τους εκπαιδευόμενους να εξάγουν μόνοι τους έναν κανόνα για το πώς μεταβάλεται το κέρδος σε σχέση με την πελατεία σε κάποιο εστιατόριο, να

[1] Συχνά λέγεται και ζ συνάρτηση του Riemann γιατί ο Riemann στη θέση του πραγματικού x τοποθέτησε μιγαδικό z. Παραμένει ανοικτό το πρόβλημα των ριζών αυτής της συνάρτησης. Ο Riemann εξέφρασε την εικασία ότι αυτά βρίσκονται στη μιγαδική ευθεία $Re(z) = 1/2$. Το πρόβλημα αυτό παραμένει ανοιχτό και μαζί με άλλα 6 αποτελούν τα 7 προβλήματα της 3ης χιλιετίας. Για το καθένα υπάρχει το χρηματικό βραβείο του \$ 1.000.000 για όποιον το λύσει πρώτος (δείτε και το [1]).

αναπαραστήσουν γραφικά τον κανόνα αυτό και τέλος, να προβληματιστούν για την αναγκαιότητα της εισαγωγής των αρνητικών αριθμών (όταν για παράδειγμα ο εστιάτορας έχει κέφια και ταΐζει δωρεάν, ή όταν το κέρδος γίνεται ζημιά με τη μείωση της πελατείας). Με μια προσεκτικότερη ματιά διαπιστώνουμε ότι υπάρχει συγκαλυμμένος ο κανόνας προσήμων «$+ \cdot - = -$», που αναμένεται να ανακαλυφθεί.

Πρόκειται δηλαδή για ένα εισαγωγικό παράδειγμα σε διάφορα πεδία των μαθηματικών, που εμπλέκει ενεργά τους εκπαιδευόμενους. Στη συνέχεια παραθέτω το παράδειγμα (σχεδόν) αυτούσιο:

ΕΣΤΙΑΤΟΡΙΟ

Ο ιδιοκτήτης ενός εστιατορίου έκανε τους ακόλουθους λογαριασμούς που δείχνουν τη σχέση μεταξύ του καθαρού κέρδους και του αριθμού των πελατών.

Αριθμός πελατών	30	40	50	60			
Καθαρό κέρδος σε €	100	200	300	400	...	...	...

- Ποιος είναι ο αριθμός των πελατών όταν δεν υπάρχει κέρδος;
- Τι συμβαίνει όταν το πλήθος των πελατών είναι μικρότερο από 20;
- Πότε αρχίζει η ζημιά;
- Υπάρχει κάποια μέθοδος με την οποία απαντάμε σε όλες αυτές τις ερωτήσεις;
  Από τι εξαρτάται η απάντηση σε όλες τις ερωτήσεις;

....

Οδηγίες για την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων:
Οριζόντιος άξονας: αριθμός πελατών, αρίθμηση ανά 10.
Κατακόρυφος άξονας: Κέρδος, αρίθμηση ανά 100.
Σημεία: (Αριθμός πελατών, κέρδος)

Κατασκευάστε έναν πίνακα με:
Πρώτη γραμμή: «Αριθμός πελατών».
Δεύτερη γραμμή: «Μέσο ποσό που πλήρωσε κάθε πελάτης».
Τρίτη γραμμή: «Συνολικό ποσό που πλήρωσαν οι πελάτες».

Καθαρό κέρδος
(Συνάρτηση που περιγράφει το θετικό ... μηδενικό ... και αρνητικό κέρδος.)
Προσδιορίστε τον τύπο αυτής της συνάρτησης (αριθμός πελατών → καθαρό κέρδος).
Απαντήστε στις ερωτήσεις του προβλήματος μελετώντας το γράφημα.

Λέξεις κλειδιά για να περιγράφετε το γράφημά σας:
Ευθεία
Κλίση
Τομές με τους άξονες. Τι πληροφορίες δίδουν αυτά τα σημεία;
Έχουν νόημα αρνητικά x;

2.3.2 Το σύνολο τιμών και η αρχή του περιστερώνα

Το σύνολο τιμών έρχεται στο προσκήνιο όταν κάνουμε λόγο για την 1—1 ιδιότητα κάποιων συναρτήσεων και την αντίστροφη μιας συνάρτησης.

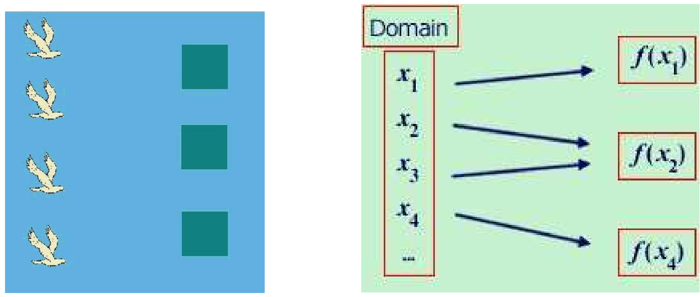
Στο σχήμα 4 παριστάνεται η «αρχή του περιστερώνα». Με απλά λόγια, αν το σύνολο τιμών (φωλιές) έχει λιγότερα στοιχεία από το πεδίο ορισμού (περιστέρια), τότε *αναγκαστικά* η συνάρτηση ΔΕΝ είναι 1—1. Υπάρχουν δηλαδή τουλάχιστον δύο στοιχεία του πεδίου ορισμού με την ίδια εικόνα (τουλάχιστον δύο περιστέρια που μένουν στην ίδια φωλια). Αυτή η τόσο απλή διαπίστωση είναι συχνά και το «κλειδί» σε αρκετά δύσκολα προβλήματα. Απαραίτητη βέβαια προϋπόθεση για την ισχύ της αρχής του περιστερώνα είναι τα δυο σύνολα να είναι *πεπερασμένα* μια και σε άπειρα σύνολα τα πράγματα είναι εντελώς διαφορετικά όπως θα διαπιστώσουμε και στην ακόλουθη παράγραφο.

Η επόμενη πρόταση θα μας πείσει για τη χρησιμότητα της αρχής του περιστερώνα. Τη συνάντησα σε κάποιο από τα σεμινάρια Διδακτικής Μαθηματικών που οργάνωσε ο καθηγητής του Πανεπιστημίου Κρήτης Μιχάλης Λάμπρου.

Πρόταση 2.3.2.1. *Κάθε κυρτό πολύεδρο έχει τουλάχιστον δυο έδρες με τον ίδιο αριθμό κορυφών.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\text{έδρα του πολύεδρου} \to \text{ αριθμός κορυφών της έδρας}$$



Σχήμα 4: Η αρχή του περιστερώνα.

Πόσες κορυφές μπορεί να έχει κάποια έδρα; Φυσικά, θα έχει από 3 μέχρι κάποιο m· το μέγιστο αριθμό κορυφών σε έδρα. Επομένως το Σύνολο Τιμών της συνάρτησης είναι υποσύνολο του συνόλου $\{3, 4, 5, \ldots, m\}$, που έχει $m-2$ στοιχεία.

Πόσες έδρες έχει το πολύεδρο; Εφόσον υπάρχει έδρα με m κορυφές, αυτή θα έχει και m ακμές (όσες είναι οι ακμές είναι και οι κορυφές). Επομένως, εκτός από αυτήν την έδρα υπάρχουν ακόμα άλλες m που συνδέονται με αυτή. Με άλλα λόγια, το πολύεδρο έχει τουλάχιστον $m+1$ έδρες.

Το συμπέρασμα που βγάζουμε είναι ότι το Πεδίο Ορισμού της συνάρτησής μας έχει περισσότερα στοιχεία από το Σύνολο Τιμών της, άρα σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα η συνάρτηση δεν είναι 1—1. Υπάρχουν δηλαδή δυο έδρες με τον ίδιο αριθμό κορυφών. $\square$

2.3.3 Μετρώντας το άπειρο

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, σε ορισμένες περιπτώσεις, όταν έχουμε δυο άπειρα σύνολα, είναι δυνατόν να επινοήσουμε μια 1—1 και επί αντιστοιχία του ενός στο άλλο, που αρχικά φαίνεται παράλογη και αντιφατική με την αρχή του περιστερώνα. Αυτό αποτελεί ένα ιδιαίτερα «αγαπητό» θέμα της Θεωρίας Συνόλων και έχει να κάνει με τη μέτρηση του απείρου. Για να γίνει πιο κατανοητό, παραθέτουμε το επόμενο «παράδοξο» παράδειγμα με το «Άπειρο Ξενοδοχείο», όπου το σύνολο των φυσικών αριθμών απεικονίζεται στο σύνολο των άρτιων αριθμών μέσω της 1—1 και επί συνάρτησης $f(n) = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ ΞΕΝΟΔΟΧΕΙΟ

Σε κάποιο ξενοδοχείο υπάρχουν άπειρα δωμάτια αριθμημένα 1, 2, 3, 4, ... Στην πόλη διεξάγεται ένα φεστιβάλ και όλα τα δωμάτια είναι κατειλημμένα. Λόγω όμως των μεγάλων απαιτήσεων, ο ιδιοκτήτης αναγκάζεται να δεχτεί «άλλους τόσους» πελάτες. Ποια όμως δωμάτια θα διαθέσει στους καινούριους πελάτες;

Γρήγορα βρίσκει την εξής λύση: Κάθε «παλιός» πελάτης μετακινείται στο δωμάτιο με νούμερο το διπλάσιο του αρχικού του δωματίου. Έτσι, οι «παλιοί» πελάτες καταλαμβάνουν δωμάτια με ζυγούς αριθμούς, ενώ τα δωμάτια με τους μονούς αριθμούς είναι στη διάθεση των «νέων» πελατών.

Ας προσέξουμε ότι λύση στο προηγούμενο πρόβλημα σημαίνει και εύρεση του σωστού τύπου αντιστοίχησης.

2.3.4 Σύνθετοι κανόνες αντιστοίχησης

Στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου οι μαθητές έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τις λεγόμενες κλαδωτές συναρτήσεις. Μιλώντας στη «γλώσσα της μηχανής», έχουμε να κάνουμε με μια πιο σύνθετη μηχανή, που αναλόγως με τις εισαγόμενες τιμές x, εφαρμόζεται και διαφορετικός τύπος. Μια τέτοια περίπτωση συνάρτησης είναι για παράδειγμα και η

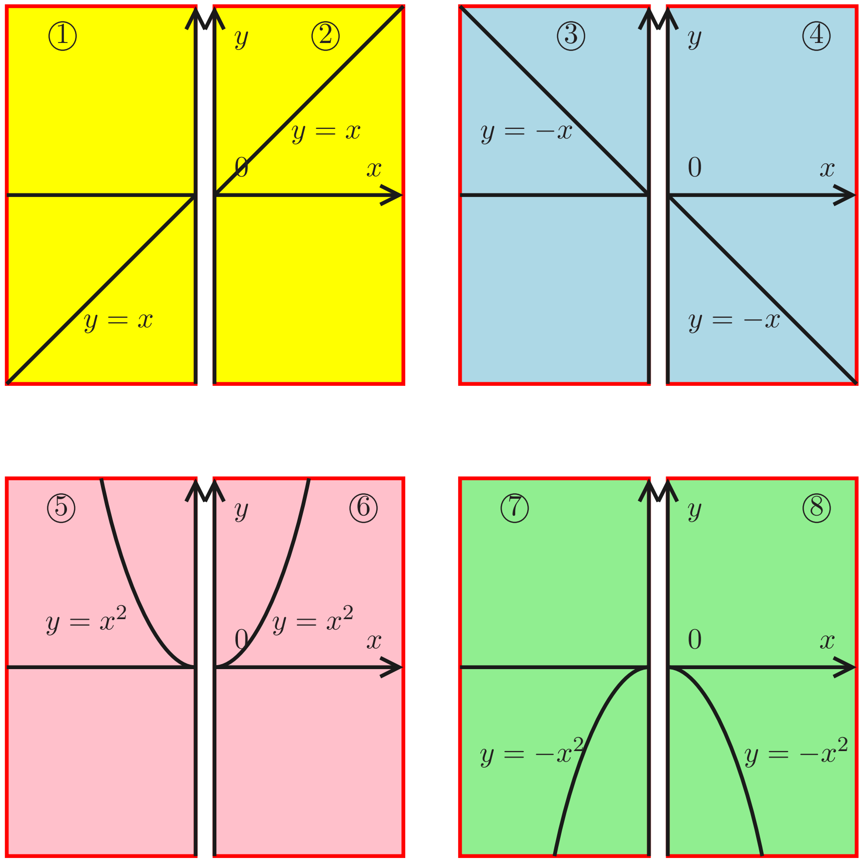
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x \geq 2 \\ 3x - 2 & \text{αν} \quad x < 2. \end{cases}$$

Οι μαθητές μας, παρουσιάζουν κάποια αδυναμία στην κατανόηση της συγκεκριμένης γραφής και τη σύνδεσή της με την πραγματική λειτουργία της συνάρτησης, ακόμα και στην απλή περίπτωση της $f(x) = |x|$. Τα πράγματα γίνονται πολύ χειρότερα όταν καλούνται να σχεδιάσουν τη γραφική παράσταση κλαδωτών συναρτήσεων.

Τα προβλήματα αυτά, σε συνδυασμό με την πίεση του χρόνου για την ολοκλήρωση της διδακτέας ύλης στο συγκεκριμένο μάθημα, υπαγορεύουν την ανάγκη για συντομότερη, απλούστερη αλλά συγχρόνως ολοκληρωμένη προσέγγιση του θέματος.

Στη συνέχεια θα εκθέσω μια δραστηριότητα που θυμίζει παιχνίδι τύπου puzzle και που εφάρμοσα με αρκετή επιτυχία στην Α΄ Τάξη του Γενικού Λυκείου

Σπηλίου:

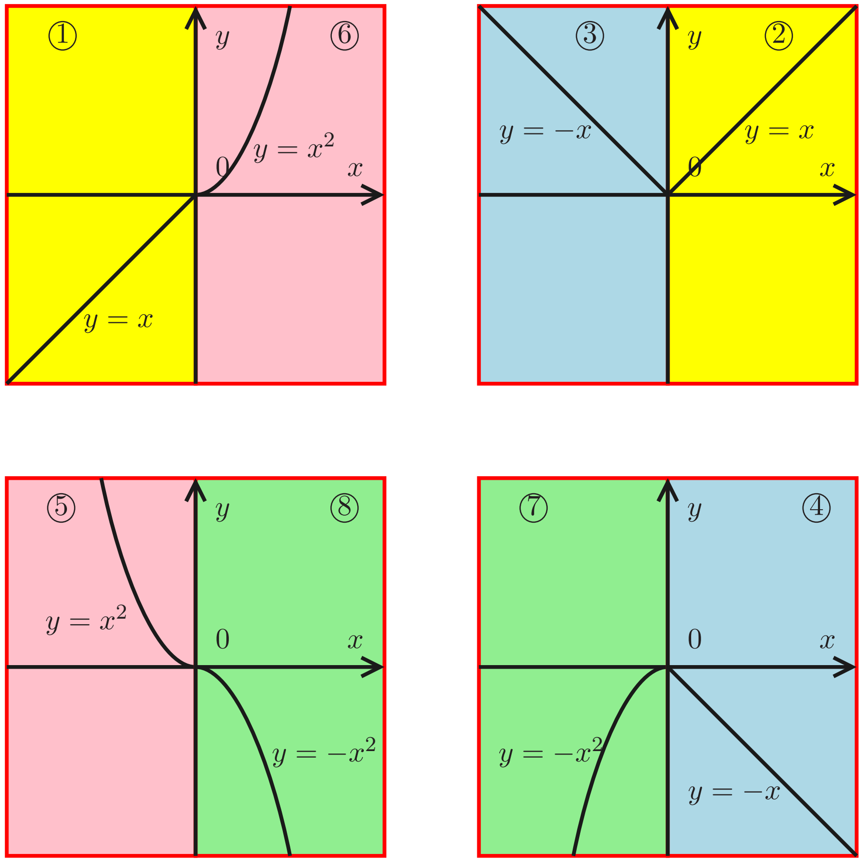


Σχήμα 5: Οι 8 καρτέλες της δραστηριότητας

Δίνουμε σε κάθε μαθητή ένα σύνολο από τις εικονιζόμενες καρτέλες του σχήματος 5. Αυτό που έχουμε κάνει είναι να απεικονίσουμε σε διαφορετικού χρώματος χαρτόνια τις καμπύλες $y = x$, $y = -x$, $y = x^2$ και $y = -x^2$. Κατόπιν, τα κόβουμε κατά μήκος του άξονα των y, ώστε να σχηματιστούν 8 καρτέλες τις οποίες και αριθμούμε. Οι μαθητές μας καλούνται να ανταποκριθούν σε δύο τύπους ασκήσεων:

1. Τους δίνουμε έναν τύπο κλαδωτής συνάρτησης όπως

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \geq 0 \\ -x & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$



Σχήμα 6: Διάφοροι συνδυασμοί

και τους ζητάμε να σχηματίσουν με τις καρτέλες τους το γράφημα της συνάρτησης.

2. Τους δίνουμε έναν περιττό και έναν άρτιο αριθμό από το 1 ως το 8, που αντιστοιχούν σε νούμερα καρτελών και τους ζητάμε αφενός να σχηματίσουν το γράφημα και αφετέρου να καταγράψουν τον τύπο της συνάρτησης.

Η εφαρμογή αυτών των ασκήσεων θα οδηγήσει σε διάφορους συνδυασμούς των καρτελών, κάποιοι από τους οποίους εικονίζονται στο σχήμα 6. Ας σχολιάσουμε ότι αν συνδυαστούν οι καρτέλες Νο ③ και ②, σχηματίζεται το γράφημα της $f(x) = |x|$ που οι μαθητές μας καλούνται να αναγνωρίσουν. Επιπλέον, αυτό το «παιχνίδι» συχνά εξελίσσεται και σε έναν συνδυαστικό προβληματισμό.

Τελικά, δε φαίνονται και τόσο «χάλια» αυτές οι συναρτήσεις... Ή μήπως όχι; Ας το ξανασκεφτούμε πριν απαντήσουμε. Δίνω μόνο ένα ακόμα παράδειγμα που ίσως βοηθήσει:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν} \;\; x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

2.3.5 Κανόνες αντιστοίχησης χωρίς αλγεβρικό τύπο

Ο Bernoulli, δίνοντας τον ορισμό του για τη συνάρτηση ως *έκφραση που κατασκευάζεται με ορισμένο τρόπο από ένα μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές*, άφησε ακαθόριστη την έκφραση «*ορισμένος τρόπος*». Ίσως όμως εννοούσε αυτό που και σήμερα φαντάζονται ορισμένοι μαθητές μας. Ότι δηλαδή αν κάποια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής υπακούει σε συγκεκριμένο κανόνα αντιστοίχησης, τότε υποχρεωτικά ο κανόνας αυτός θα πρέπει να είναι αλγεβρική έκφραση πολυωνυμικών, τριγωνομετρικών, εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων. Το πολύ πολύ να εμπλέκονται και οι αντίστροφες αυτών των συναρτήσεων.

Δυστυχώς όμως, τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά: Αν θεωρήσουμε για παράδειγμα τη συνάρτηση

$$f(x) = \int_0^x e^{u^2} du$$

δε θα μπορέσουμε ποτέ να βρούμε έναν «τύπο» που να περιγράφει τον συγκεκριμένο κανόνα αντιστοίχησης, με τις συναρτήσεις του «καταλόγου» μας. (Η συνάρτηση αυτή, όχι μόνο υπάρχει—λόγω της συνέχειας της $g(u) = e^{u^2}$—αλλά είναι και άπειρες φορές παραγωγίσιμη).

Σ' αυτές τις περιπτώσεις προσπαθούμε να βρούμε κάποια «γνωστή» συνάρτηση που να *προσεγγίζει* την «αινιγματική» συνάρτηση (και εδώ αναγνωρίζεται η μεγάλη συμβολή του Θεωρήματος Taylor). Καμιά φορά όμως, ακόμα και αυτό είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί. Μια τέτοια περίπτωση καταγράφηκε στην ιστορία κατά τη «γέννηση» του Θεωρήματος των Πρώτων Αριθμών:

Είναι γνωστό από την αρχαιότητα ότι οι πρώτοι αριθμοί δεν κατανέμονται ομοιόμορφα ανάμεσα στους άλλους αριθμούς. Είναι δυνατόν, μεταξύ δυο διαδοχικών πρώτων αριθμών, να μεσολαβεί όσο μεγάλο πλήθος σύνθετων αριθμών κι αν επιθυμούμε. Βέβαια, ένα εύλογο ερώτημα είναι *πόσοι είναι οι πρώτοι αριθμοί που δεν υπερβαίνουν έναν φυσικό αριθμό* N; Ή ακόμα καλύτερα, ποια είναι η πυκνότητα των πρώτων αριθμών στους N αρχικούς φυσικούς $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$; Η πυκνότητα αυτή D_N, που είναι συνάρτηση του N, εκφράζεται με το κλάσμα

$$D_N = \frac{P(N)}{N}$$

όπου $P(N)$ είναι το πλήθος των πρώτων που είναι μικρότεροι ή ίσοι του N.

Το 1791 ο Gauss, σε ηλικία μόλις 14 ετών, παρατήρησε ότι αυτή η ποσότητα είναι περίπου ίση με $1/\ln N$, ιδιαίτερα για πολύ μεγάλα N. Χρειάστηκαν όμως να περάσουν 105 χρόνια για να αποδειχτεί η εικασία του, παρά τις προσπάθειες και του διακεκριμένου μαθηματικού Riemann, που υπήρξε μαθητής του Gauss. Εν τέλη, το 1896, το απέδειξαν οι Hadamard και de la Valée Poussin οι οποίοι εργάστηκαν ανεξάρτητα. Το αποτέλεσμα αυτό είναι το γνωστό *Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών* (δείτε και το [1]):

Θεώρημα 2.3.5.1 (Θεώρημα των Πρώτων Αριθμών)**.**

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\ln N \cdot P(N)}{N} = 1$$

3 Εφαρμογές των Συναρτήσεων

Στην προηγούμενη ενότητα προσπαθήσαμε να εκφράσουμε το *τι είναι συνάρτηση*. Το ερώτημα *πού χρησιμοποιείται μια συνάρτηση* είναι απείρως δυσκολότερο να απαντηθεί. Αυτό γιατί η συνάρτηση έχει το ίδιο εύρος με τα μαθηματικά: σχεδόν υπάρχουν παντού, είτε το υποψιαζόμαστε είτε όχι. Σ' αυτή την ενότητα θα δοθεί έμφαση σε εφαρμογές των συναρτήσεων που προκύπτουν από τη διπλή ιδιότητά τους να είναι αλγεβρικά και γεωμετρικά αντικείμενα συγχρόνως (αλγεβρική έκφραση και καμπύλη μαζί).

3.1 Βελτιστοποίηση - Γραμμικός Προγραμματισμός

Στην παρούσα υποενότητα εξετάζονται προβλήματα βελτιστοποίησης όπως μεγίστων και ελαχίστων συνάρτησης (για παράδειγμα μέγιστο κέρδος ή ελάχιστη ζημιά). Με αυτά τα προβλήματα ασχολείται κυρίως η Ανάλυση, αλλά σε απλούστερη μορφή και ο Γραμμικός Προγραμματισμός.

Στα Μαθηματικά της Γ′ Γυμνασίου, στο 8ο κεφάλαιο, αναφέρονται στοιχεία και προβλήματα του Γραμμικού Προγραμματισμού, που όμως δεν περιλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη.

Πιστεύω όμως ότι αξίζει τον κόπο να παρουσιάσουμε στους μαθητές μας μια πρακτική εφαρμογή των συναρτήσεων. Προτείνω λοιπόν το ακόλουθο παράδειγμα (αγορά κινητού) που και απλό είναι και σύγχρονο.

Προσωπικά το έλαβα από το συνάδελφο Σωκράτη Ντριάνκο (περιέχεται και στο άρθρο του στο [6]). Ο ίδιος όμως με ενημέρωσε ότι υπάρχει αυτούσιο και στο [7].

3.1.1 Αγορά κινητού.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ας υποθέσουμε ότι θέλετε να αγοράσετε κινητό τηλέφωνο και μετά από έρευνα στην αγορά καταλήξατε μεταξύ τριών αξιόπιστων εταιρειών...Α-Β-Γ.

- Η Α χρεώνει το μηνιαίο πάγιο 15 € και $0,30$ € το κάθε λεπτό τηλεφωνικής κλήσης.
- Η Β χρεώνει το μηνιαίο πάγιο 12 € και $0,40$ € το κάθε λεπτό τηλεφωνικής κλήσης.
- Η Γ χρεώνει το μηνιαίο πάγιο 9 € και $0,50$ € το κάθε λεπτό τηλεφωνικής κλήσης.

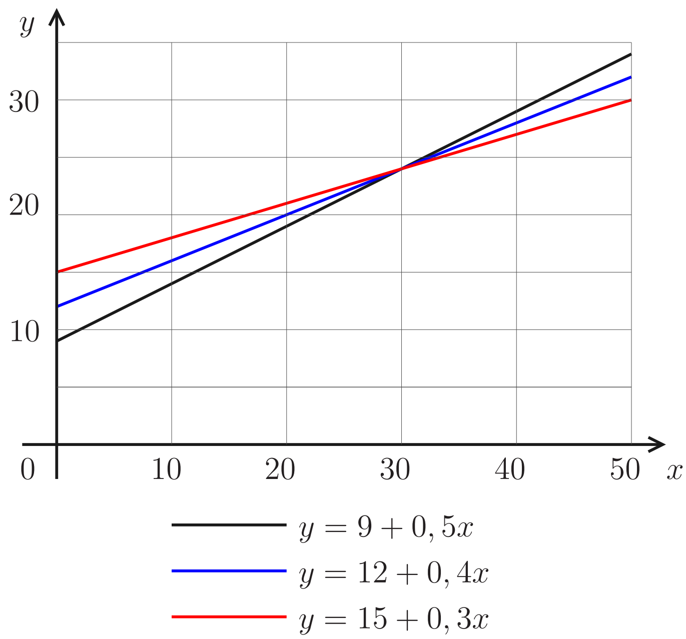
Ποια εταιρεία σας συμφέρει να επιλέξετε τελικά;

Η ΛΥΣΗ

Το ενδιαφέρον στη λύση του προβλήματος είναι ότι η απάντηση είναι «*εξαρτάται*» και όχι «*η τάδε εταιρεία*» όπως ίσως θα περίμενε κάποιος. Αυτό το «εξαρτάται» για να λεχθεί θα πρέπει να προηγηθεί μια προσεκτική μελέτη του προβλήματος.

Εδώ έρχεται να παίξει καθοριστικό ρόλο η μαθηματικοποίηση του προβλήματος και η γραφική του αναπαράσταση. Αν x είναι τα λεπτά τηλεφωνικής κλήσης το μήνα, τότε η μηνιαία χρέωση των τριών εταιρειών περιγράφεται από τις επόμενες τρεις συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} f_{\Gamma}(x) &= 9 + 0,5x \\ f_{\mathrm{B}}(x) &= 12 + 0,4x \\ f_{\mathrm{A}}(x) &= 15 + 0,3x \end{aligned}$$



Σχήμα 7: Γραφική αναπαράσταση του προβλήματος αγοράς κινητού.

Στο σχήμα 7 φαίνεται και η λύση του προβλήματος: Αν τα λεπτά τηλεφωνικής κλήσης είναι λιγότερα από 30 μας συμφέρει η Γ εταιρεία ενώ αν είναι από 30 και πάνω μας συμφέρει η Α εταιρεία.

3.1.2 π^e ή e^π;

Στο διαγωνισμό του Α.Σ.Ε.Π. το 2000, ένα από τα ερωτήματα στα Μαθηματικά ήταν η διάταξη των π^e και e^π. Ποιο από τα δυο είναι μεγαλύτερο; Δύσκολο να αποφασίσει κανείς: Τόσο ο π όσο και ο e είναι αριθμοί πολύ κοντά στο 3 (άσχετα αν ο ένας είναι μεγαλύτερος και ο άλλος είναι μικρότερος).

Αν πάρουμε τις $\frac{1}{e\pi}$ δυνάμεις των προς σύγκριση αριθμών, το ερώτημα μετασχηματίζεται στο εξής ισοδύναμο:

Ποιος από τους αριθμούς $\pi^{1/\pi}$ και $e^{1/e}$ είναι ο μεγαλύτερος;

Αμέσως αναγνωρίζουμε την ομοιομορφία των δύο εκφράσεων· και οι δύο είναι τιμές της συνάρτησης

$$f(x) = x^{1/x} \quad , \, x > 0$$

Δε μένει παρά να μελετήσουμε την εν λόγω συνάρτηση για την ύπαρξη τυχόν μέγιστων ή ελάχιστων τιμών. Αν θέλουμε να απλοποιήσουμε τους λογαριασμούς μας, μπορούμε αντί για την f να ασχοληθούμε με την $g = \ln f$ που έχει τύπο

$$g(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Αυτό που ήθελα να τονίσω με το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι ότι συχνά, ο δρόμος προς τη λύση κάποιων φαινομενικά δύσκολων προβλημάτων περνά μέσα από την έμπνευση της κατάλληλης συνάρτησης.

3.2 Ο γάμος της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας

Από τη στιγμή που επινοήθηκε το καρτεσιανό επίπεδο, τα μαθηματικά πραγματικά μεταμορφώθηκαν: Οι αλγεβρικές εκφράσεις απεικονίστηκαν σε καμπύλες, οι πράξεις της αριθμητικής ερμηνεύτηκαν ως γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, οι γεωμετρικές σχέσεις (παραλληλία, καθετότητα, γωνία,...) διατυπώθηκαν με εξισώσεις και συναρτήσεις. Δίκαια λοιπόν, αναφερόμαστε σ' αυτήν την εξέλιξη ως το «γάμο της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας». Τόσο πολύ έχουν εξαλειφθεί κάποιες από τις διαχωριστικές γραμμές, που όταν λέμε για παράδειγμα κυρτότητα, γραμμικότητα κ.τ.λ., ο νους μας πηγαίνει στις αλγεβρικές σχέσεις και όχι τόσο στις γεωμετρικές. Παρακάτω θα δούμε κάποιες από τις συνέπειες αυτού του «γάμου» σε συγκεκριμένα παραδείγματα.

3.2.1 Η γεωμετρική έκφραση της επιμεριστικής ιδιότητας.

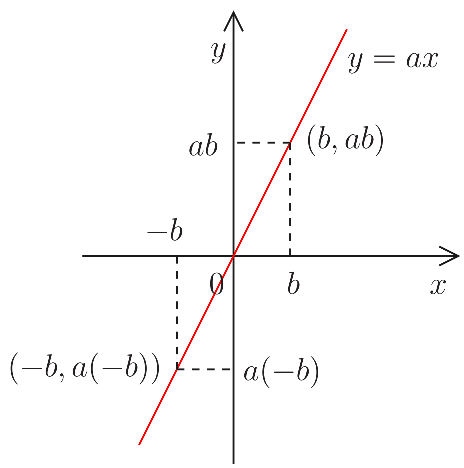
Αν αναζητήσουμε μια αιτιολογία για τον κανόνα πολλαπλασιασμού

$$a(-b) = -ab$$

θα βρούμε την εξής, που αναφέρεται και στο διδακτικό βιβλίο της Άλγεβρας Α′ Λυκείου:

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow a\,[b + (-b)] &= 0 \\ \Leftrightarrow ab + a(-b) &= 0 \\ \Leftrightarrow a(-b) &= -ab \end{aligned}$$

Όπως παρατηρούμε, ο ρόλος της επιμεριστικής ιδιότητας είναι καθοριστικός.



Σχήμα 8: Το γεωμετρικό επιχείρημα.

Εναλλακτικά, υπάρχει και το εξής γεωμετρικό επιχείρημα (σχήμα 8): Θεωρούμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = ax$, που ως γνωστό είναι ευθεία γραμμή που διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων. Οπότε, τα δύο σημεία της (b, ab) και $(-b, a(-b))$ είναι συμμετρικά ως προς το Ο. Αλλά στο καρτεσιανό επίπεδο το συμμετρικό ενός σημείου (s, t) ως προς το Ο είναι το $(-s, -t)$.

Αναγκαστικά λοιπόν, τα σημεία $(-b, a(-b))$ και $(-b, -ab)$ θα πρέπει να ταυτίζονται ως συμμετρικά του (a, ab). Δηλαδή, $a(-b) = -ab$.

Εντοπίσαμε λοιπόν δυο διαφορετικούς δρόμους για το ίδιο θέμα. Ο ένας ήταν αλγεβρικός και ο άλλος γεωμετρικός. Ο ένας βασίστηκε στην ισχύ της επιμεριστικής ιδιότητας και ο άλλος στη γεωμετρική ιδιότητα της καμπύλης $y = ax$ να είναι ευθεία γραμμή που διέρχεται από το (0,0). Στην πραγματικότητα αυτά τα δύο είναι ισοδύναμα, όπως φαίνεται και με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.1.1. *Οι επόμενες δυο προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

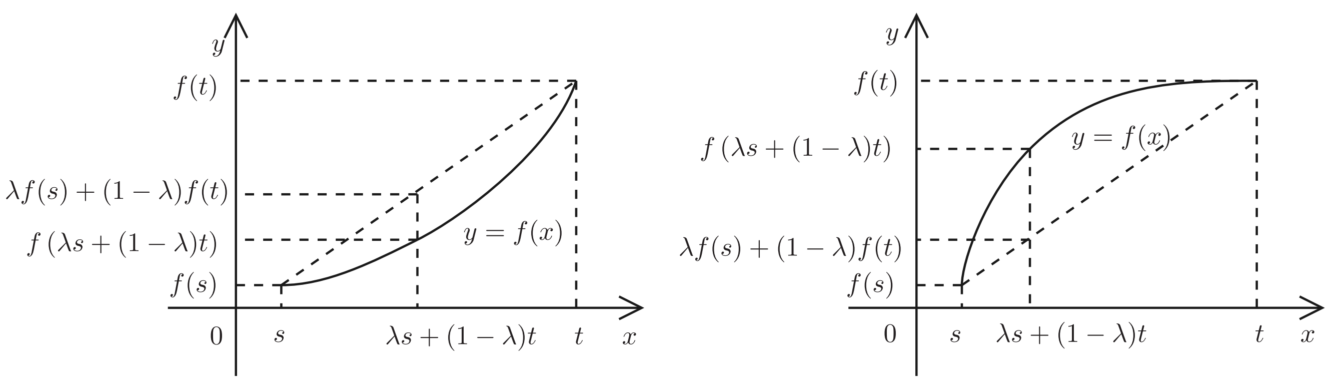
1. *Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, b και c ισχύει*

$$a(b + c) = ab + ac$$

2. *Για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό a, η καμπύλη $y = ax$ είναι ευθεία γραμμή.*

Απόδειξη. 1. $\Rightarrow$ 2.: Τετριμμένο.

2. $\Rightarrow$ 1.: Έστω a, b και c τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Θα αποδείξουμε ότι αν η $y = ax$ είναι ευθεία γραμμή, τότε ισχύει $a(b + c) = ab + ac$.



Σχήμα 9: Κυρτή και κοίλη συνάρτηση.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ax$. Λόγω της γραμμικότητας της $y = ax$ η συνάρτηση αυτή είναι και κοίλη και κυρτή (σχήμα 9). Με άλλα λόγια, αν

$\lambda \in [0,1]$ τότε για οποιαδήποτε s και t ισχύει

$$f(\lambda s + (1-\lambda)t) = \lambda f(s) + (1-\lambda) f(t)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} f(b) + f(c) &= ab + ac \\ &= \frac{1}{2}a \cdot 2b + \frac{1}{2}a \cdot 2c \\ &= \frac{1}{2}f(2b) + \frac{1}{2}f(2c) \qquad \text{ορισμός της } f \\ &= f\left(\frac{1}{2}2b + \frac{1}{2}2c\right) \qquad \text{γραμμικότητα της } f \\ &= f(b+c) \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} f(b) + f(c) &= f(b+c) \\ \Leftrightarrow ab + ac &= a(b+c) \end{aligned}$$

□

3.2.2 Τριώνυμο και απόλυτα

Ένα από τα συνηθέστερα λάθη των παιδιών είναι το

$$\sqrt{a^2} = a$$

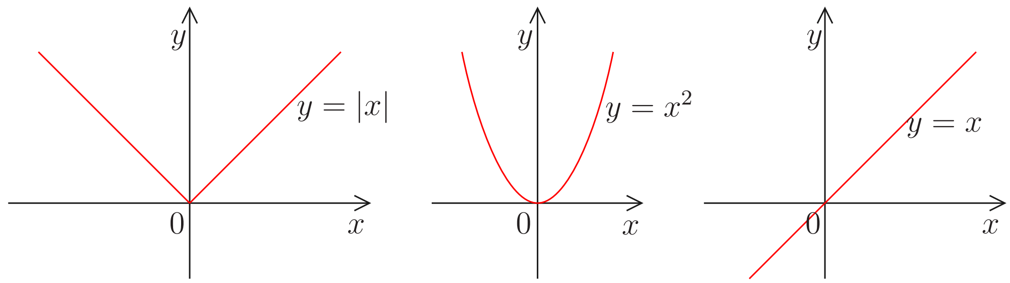
Στην Α′ λυκείου μπορούμε να θέσουμε τις εξής ερωτήσεις με τη συγκεκριμένη σειρά:

1. Παρατηρήστε το σχήμα 10. Κατά τη γνώμη σας, η $y = |x|$ με ποια καμπύλη «μοιάζει» περισσότερο; Την $y = x$ ή την $y = x^2$;

2. Ποια από τις δυο σχέσεις πιστεύετε ότι ισχύει;

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad \text{ή} \qquad \sqrt{x^2} = x$$

Με τις ερωτήσεις αυτές στοχεύουμε να εστιάσουμε τόσο στη γεωμετρική όσο και την αλγεβρική ομοιότητα των συναρτήσεων. Και οι δυο έχουν γράφημα με μη αρνητικές τιμές, είναι φθίνουσες στο $(-\infty, 0)$, αύξουσες στο $(0, +\infty)$. Υπάρχει επίσης ισχυρή αναλογία στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων όπως περιγράφεται στον ακόλουθο πίνακα, συνέπεια της $\sqrt{x^2} = |x|$.



Σχήμα 10: Αναζητώντας την όμοια καμπύλη στην $y = |x|$.

Τριώνυμο	**Απόλυτα**
$x^2 = \theta^2 \Leftrightarrow x = \theta \quad ή \quad x = -\theta$	$\lvert x \rvert = \theta \Leftrightarrow x = \theta \quad ή \quad x = -\theta$
$x^2 < \theta^2 \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$	$\lvert x \rvert < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$
$x^2 > \theta^2 \Leftrightarrow x < -\theta \quad ή \quad x > \theta$	$\lvert x \rvert > \theta \Leftrightarrow x < -\theta \quad ή \quad x > \theta$

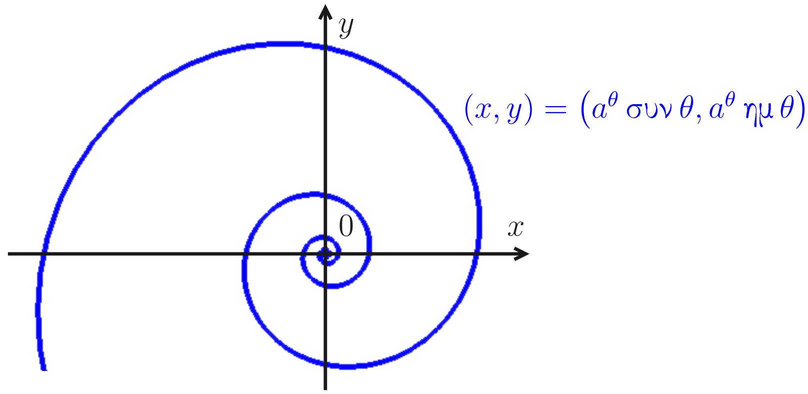
3.2.3 Καμπύλες που ξεχωρίζουν.

Η λογαριθμική σπείρα, η καμπύλη που εικονίζεται στο σχήμα 11, έχει την εξής εντυπωσιακή ιδιότητα: Αν τη μεγενθύνουμε ή τη σμικρύνουμε δεν αλλάζει μέγεθος· μόνο που περιστρέφεται λιγάκι γύρω από τον πόλο της. Όπως διαβάζουμε και στο [2], ο Jacob Bernoulli είχε τόσο πολύ ενθουσιαστεί από αυτήν την ιδιότητα της λογαριθμικής σπείρας ώστε ζήτησε να τη χαράξουν στο μνήμα του μαζί με τη λατινική φράση «Eadem mutata resurgo», που σημαίνει «Αν και αλλαγμένος, θα εμφανιστώ ο ίδιος.»[2].

Η σπείρα βέβαια δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης. Υπάρχουν όμως γραφήματα συναρτήσεων που να έχουν ανάλογες εντυπωσιακές ιδιότητες;

Η απάντηση είναι θετική. Υπάρχουν συναρτήσεις που το γράφημά τους απλά μετακινείται όταν εφαρμόζεται κάποιος μετασχηματισμός της μορφής $y = cf(x)$ ή $y = f(cx)$ με $c > 0$. Αυτό ακούγεται καταρχήν παράλογο μια και ο πρώτος μετασχηματισμός σημαίνει κατακόρυφη επιμήκυνση ή συσπείρωση, ενώ ο δεύτερος οριζόντια (σχήμα 12).

[2]Τελικά η φράση παραλείφθηκε και η σπείρα που χαράχτηκε δεν ήταν λογαριθμική αφού το πλάτος ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ελίξεις παρέμενε σταθερό.



Σχήμα 11: Λογαριθμική σπείρα

Το ενδιαφέρον είναι ότι οι ζητούμενες συναρτήσεις, μας είναι εξαιρετικά οικείες: πρόκειται για τις εκθετικές και τις λογαριθμικές συναρτήσεις. Αν «μεταφράσουμε» γεωμετρικά τις τόσο ιδιαίτερες και από αρκετούς «αχώνευτες» ιδιότητές τους, αυτό ακριβώς προκύπτει. Φυσικά αναφέρομαι στις

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$$

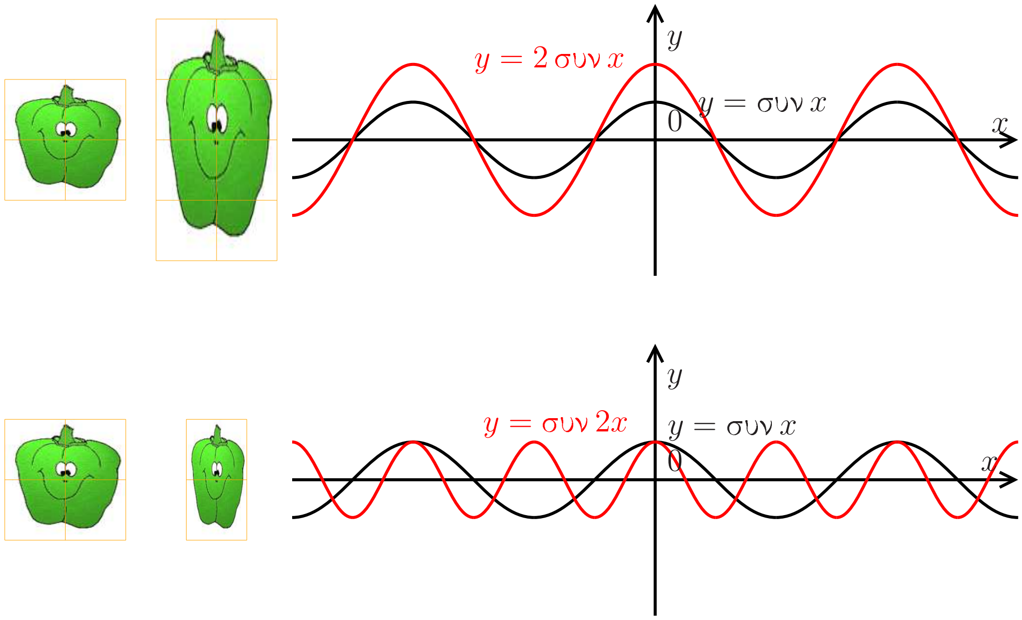
και

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

Πραγματικά, η εκθετική συνάρτηση είναι αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό $y = cf(x)$, $c > 0$ αφού για $f(x) = a^x$ ισχύει:

$$\begin{aligned} cf(x) &= ca^x \\ &= a^{\log_a c} \cdot a^x \\ &= a^C \cdot a^x \qquad \text{όπου } C = \log_a c \\ &= a^{C+x} \\ &= f(C+x) \end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η επίδραση του μετασχηματισμού είναι μια οριζόντια μετατόπιση. Επομένως εντοπίσαμε ένα σχήμα που ενώ «επιμηκύνεται» κατακόρυφα, αυτό δεν αλλάζει.



Σχήμα 12: Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί: Σχέση της $y = f(x)$ με τις $y = cf(x)$ και $y = f(cx)$.

Όμοια, για τη συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ και $c > 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(cx) &= \log_a(cx) \\ &= \log_a c + \log_a x \\ &= C + \log_a x \qquad \text{όπου } C = \log_a c \\ &= C + f(x) \end{aligned}$$

Εδώ έχουμε απλώς μια κατακόρυφη μετατόπιση, παρόλο που ο μετασχηματισμός επιδρά με οριζόντια επιμήκυνση ή συσπείρωση.

Αναφορές

[1] Keith Devlin, *The Millennium Problems - The seven greatest unsolved mathmatical puzzles of our time*, Granta Books, 2005.

[2] M. Gardner, *About three types of spirals and how to construct them*, Mathematical Games, Scientific American, Apr. 1962, V 206, No 4.

[3] Richard Mankiewicz, *Η ιστορία των μαθηματικών*, εκδόσεις Αλεξάνδρεια, 2002.

[4] V.M. Tikhomirov, *Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα*, εκδόσεις Κάτοπτρο, 1999.

[5] Carol Vorderman, *Ανακαλύπτω τα Μαθηματικά*, εκδόσεις Ερευνητές, 1998.

[6] Σωκράτης Ντριάνκος, *Συναρτήσεις*,
http://users.auth.gr/˜lemonidi/sde_yliko/paradigmata.htm

[7] Μπάμπης Τουμάσης, *Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των Μαθηματικών*, εκδόσεις Κωστόγιαννος, Χαλκίδα, 1999.