Η χρήση γεωμετρικών μετασχηματισμών με DGS, ως μέθοδος επίλυσης προβλημάτων γεωμετρικών τόπων και κατασκευών

Ειρήνη Περυσινάκη
Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ηρακλείου
iriniper@sch.gr
http://users.sch.gr/iriniper/

Ελισάβετ Καλογερία
3ο Γυμνάσιο Αργυρούπολης
Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας
ekaloger@ppp.uoa.gr

Περίληψη Τα DGS (Dynamic Geometry Systems) επιτρέπουν μια σειρά από χειρισμούς των γεωμετρικών αντικειμένων, όπως το σύρσιμο, η αποτύπωση ίχνους, ο εύκολος και γρήγορος γεωμετρικός μετασχηματισμός τους (μεταφορά, περιστροφή, ανάκλαση, αντιστροφή), για τους οποίους η έρευνα έχει δείξει ότι βοηθούν τον μαθητή να αναπτύξει νέες στρατηγικές στην επίλυση γεωμετρικών - και όχι μόνο - προβλημάτων. Όμως, οι δυνατότητες αυτές ελάχιστα αξιοποιούνται στις αποδεικτικές διαδικασίες των σχολικών βιβλίων (παραμένουν αναχρονιστικά), ούτε έχει αναπτυχθεί κάποια μεθοδολογία πάνω σε αυτές. Το κενό αυτό επιχειρεί να καλύψει αυτό το άρθρο, περιγράφοντας μια μέθοδο αξιοποίησης του «συρσίματος με ενεργοποιημένο ίχνος», προκειμένου να αναδειχθούν οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, ως "κλειδιά" για την λύση προβλημάτων.

Λέξεις κλειδιά: DGS, γεωμετρικές κατασκευές, γεωμετρικοί τόποι, μετασχηματισμοί

1 Εισαγωγή

Η παρούσα εισήγηση επιχειρεί να αναδείξει πτυχές της χρήσης DGS στην επίλυση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών και γεωμετρικών τόπων, εστιάζοντας στη δυνατότητα αξιοποίησης μετασχηματισμών για την επίλυσή τους. Η οπτική μέσα από την οποία επιχειρούμε να προσεγγίσουμε τη χρήση των DGS, επικεντρώνεται στη δυνατότητα αξιοποίησής τους σε όλες τις φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας ή τουλάχιστον στις περισσότερες από αυτές. Έχει επισημανθεί από αντίστοιχες έρευνες, όπως για παράδειγμα της Laborde [7], η τάση αξιοποίησης των τεχνολογικών εργαλείων κυρίως μέχρι τη φάση του σχηματισμού εικασίας και με την τυπική απόδειξη να λαμβάνει χώρα με χαρτί – μολύβι, εκτός υπολογιστικού περιβάλλοντος. Έτσι, εστιάσαμε στην εξεύρεση δραστηριοτήτων που μεγιστοποιούν τη χρήση περιβαλλόντων DGS και σε άλλες φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας, μέσα από την αξιοποίηση αντίστοιχων εργαλείων ή μεθόδων.

2 Οι μετασχηματισμοί στα Π.Σ. των μαθηματικών

Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η διδασκαλία των μετασχηματισμών ξεκινά από την Α' Γυμνασίου με την αξονική και κεντρική συμμετρία, αρχικά μέσω εμπλοκής των μαθητών σε χειραπτικές εργασίες δίπλωσης ή περιστροφής γεωμετρικών αντικειμένων και στη συνέχεια μέσω κατασκευών των συμμετρικών βασικών γεωμετρικών σχημάτων ως προς άξονα ή κέντρο συμμετρίας, με χρήση των γεωμετρικών οργάνων. Ωστόσο, στις υπόλοιπες τάξεις του Γυμνασίου, συναντάμε ελάχιστες αναφορές στη συμμετρία, κάποιες από αυτές στην Άλγεβρα και κάποιες στη Γεωμετρία. Ανάλογη είναι και η εικόνα στο Λύκειο, με τη διαφορά ότι η συμμετρία είναι πολλές φορές το ζητούμενο κάποιων ασκήσεων κυρίως γεωμετρίας, ενώ η χρήση μετασχηματισμών ευρύτερα (μεταφορών και συμμετριών) απαντάται κυρίως σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων στην Άλγεβρα. Παντελώς δε απουσιάζουν άλλοι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, όπως η περιστροφή και η ομοιοθεσία.

Ειδικότερα, σε ό,τι αφορά στη συμμετρία, παρά το γεγονός ότι θεωρείται μια πολύ σημαντική μαθηματική έννοια, η οποία έχει ισχυρές συνδέσεις και με άλλα διδακτικά αντικείμενα ή τομείς της καθημερινότητας, η έρευνα δείχνει - πχ Leikin et al [9] - ότι σπάνια χρησιμοποιείται στα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης *ως μέθοδος επίλυσης προβλημάτων*. Η Leikin [10] σε έρευνα που πραγματοποίησε προκειμένου να ανιχνεύσει τις προτιμήσεις εκπαιδευτικών σχετικά με τις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων, διαπίστωσε ότι η τεχνική που επιλέγουν για να λύσουν ένα πρόβλημα είναι στενά συνδεδεμένη με τη συγκεκριμένη μαθηματική ενότητα στην οποία το πρόβλημα δίνεται για επίλυση. Το εύρημα αυτό, φαίνεται να εξηγεί το γεγονός ότι η συμμετρία χρησιμοποιείται κυρίως σε προβλήματα που προτείνονται στους μαθητές στην ομώνυμη ενότητα των σχολικών βιβλίων της γεωμετρίας. Παράλληλα, η έρευνα της Leikin έδειξε ότι στις περιπτώσεις που οι εκπαιδευτικοί αξιοποιούν τη συμμετρία ως μέθοδο επίλυσης προβλημάτων, επιλέγουν την γεωμετρική και όχι τόσο την αλγεβρική συμμετρία (πχ σε γραφικές παραστάσεις, συστήματα κλπ), με την οποία δεν φαίνεται να είναι ιδιαίτερα εξοικειωμένοι. Στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, η διδασκαλία της συμμετρίας στο γυμνάσιο περιορίζεται σε λίγες διδακτικές ώρες προς τη λήξη της Α' Γυμνασίου, ενώ στις υπόλοιπες τάξεις υπάρχουν λιγοστές αναφορές σε αυτήν. Στο Λύκειο, αποτελεί μια σύντομη παράγραφο στη Γεωμετρία της Α' Λυκείου, ως εφαρμογή της μεσοκαθέτου τμήματος, με περιορισμένη χρήση στις ασκήσεις του βιβλίου (λίγο στις ανισοτικές σχέσεις) και στην μετέπειτα θεωρία. Συνεπώς, σε ένα εκπαιδευτικό σύστημα του οποίου το Πρόγραμμα Σπουδών (Π.Σ.) δεν ευνοεί τη χρήση της συμμετρίας ως τεχνικής επίλυσης προβλημάτων (διαφορετικών μαθηματικών περιοχών) και με δεδομένη τη διαπίστωση ότι ευρύτερα οι εκπαιδευτικοί δεν είναι ιδιαίτερα εξοικειωμένοι με αυτή, είναι αναμενόμενο το ίδιο ακριβώς να συμβαίνει και με τους μαθητές. Πρέπει βεβαίως να επισημάνουμε, ότι τα παραδοσιακά διδακτικά μέσα δεν είναι ιδιαίτερα εύκολο να την αποδώσουν ως αποτέλεσμα μετακίνησης ενός αντικειμένου από μια θέση του επιπέδου σε μια άλλη. Και αν - σε επίπεδο γυμνασίου - η δίπλωση ενός διαφανούς χαρτιού είναι μια διαδικασία που προσδιορίζει με σχετική ευκολία τη νέα θέση του αντικειμένου, η περίπτωση της περιστροφής γύρω από ένα σημείο, δεν αποδίδεται το ίδιο εύκολα, ιδιαίτερα όταν πρόκειται για σύνθετο γεωμετρικό σχήμα. Αυτό το κενό, έρχονται να καλύψουν τα περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας, τα διαθέσιμα εργαλεία των οποίων, έχουν τη δυνατότητα να προσφέρουν μια μεγάλη ποικιλία αναπαραστάσεων αυτής της κίνησης, ευνοώντας αρχικά την εξοικείωση των μαθητών με τα διαφορετικά είδη συμμετρίας - ιδιαίτερα σε μικρότερες βαθμίδες της εκπαίδευσης - ώστε στη συνέχεια να καταστεί εφικτή η χρήση τους ως μεθόδου επίλυσης άλλων προβλημάτων.

3 Αξιοποίηση DGS στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων

3.1 Ο ρόλος του συρσίματος

Γενικότερα, η διείσδυση της τεχνολογίας στα Π.Σ. των μαθηματικών, φαίνεται να προσφέρει νέες δυνατότητες μέσα από τη χρήση εργαλείων που επιτρέπουν στο μαθητή να χειρισθεί άμεσα τα γεωμετρικά σχήματα, με πιο σημαντική λειτουργία αυτή του συρσίματος. Μπορεί το ίδιο το σύρσιμο να μην αποτελεί 'εργαλείο' κατασκευής, όμως η εφαρμογή του πάνω στα γεωμετρικά αντικείμενα απαιτεί τη λήψη αποφάσεων για τη συμπεριφορά τους καθώς αυτά μετακινούνται, ενώ ταυτόχρονα - σε συνδυασμό με άλλα εργαλεία - δημιουργεί νέους τρόπους αιτιολόγησης [4], νέες στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων [11] και νέες - εναλλακτικές προς τις παραδοσιακές - μεθόδους απόκτησης της γεωμετρικής γνώσης [11].

Οι τρόποι με τους οποίους ο μαθητής σύρει τα γεωμετρικά αντικείμενα δεν αποτελούν μια απλά παρατηρούμενη εξωτερικά ενέργεια, αλλά περιγράφουν μια εσωτερική διανοητική δομή του λύτη και σχετίζονται άμεσα με τη φάση επίλυσης ενός προβλήματος. Οι τρόποι αυτοί, μελετήθηκαν και ταξινομήθηκαν αρχικά από τους Arzarello et al [1] σε επτά διαφορετικά είδη συρσίματος, που ξεκινούν από το σχηματισμό μιας εικασίας και καταλήγουν στην επιβεβαίωσή της (περιπλανητικό, δεσμευμένο, καθοδηγούμενο, κρυφού γεωμετρικού τόπου, γραμμής, συνδεδεμένο και ελέγχου). Μια τροποποιημένη εκδοχή της παραπάνω κατηγοριοποίησης - την οποία υιοθετούμε ως την πλέον συμβατή με το περιεχόμενο της παρούσας εργασίας - προτείνεται από τις Baccaglini - Frank & Mariotti [2]: (1) Περιπλανητικό/τυχαίο σύρσιμο (wandering/random dragging), μέσω του οποίου αναζητούνται ενδιαφέροντες σχηματισμοί η κανονικότητες στο σχήμα. (2) Σύρσιμο διατήρησης (maintaining dragging), κατά το οποίο, ένα αντικείμενο σύρεται έτσι, ώστε το σχήμα να διατηρεί κάποια ιδιότητα που παρατηρήθηκε, καθιστώντας την ιδιότητα αυτή ως σταθερά που δεν υπήρχε στα δεδομένα του προβλήματος, αλλά δημιουργήθηκε από το σύρσιμο της προηγούμενης φάσης. (3) Σύρσιμο με ενεργοποιημένο ίχνος (dragging with trace activated), σε ένα ή περισσότερα αντικείμενα, που επιτρέπει τη δημιουργία εικασίας. (4) Σύρσιμο ελέγχου (dragging test), με το οποίο σύρονται βασικά σημεία, ώστε το σχήμα που κατασκευάσθηκε σε προηγούμενη φάση, να ελεγχθεί αν διατηρεί τις επιθυμητές ιδιότητες.

Στις δραστηριότητες που παραθέτουμε και προτείνουμε στη συνέχεια, αξιοποιούνται ιδιαίτερα οι τέσσερις παραπάνω μορφές συρσίματος σε όλη τη διαδικασία επίλυσης και μάλιστα αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της.

3.2 Γεωμετρικές κατασκευές και μετασχηματισμοί

Η διαδικασία μιας κατασκευής, η οποία είναι γνωστή ως αναλυτικο-συνθετική μέθοδος, περιλαμβάνει τα στάδια 'ανάλυση → σύνθεση → απόδειξη → διερεύνηση'. Χρησιμοποιούμε την 'ανάλυση' όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή: θεωρώντας ότι η κατασκευή πραγματοποιήθηκε, προσπαθούμε να εντοπίσουμε σχέσεις ή ιδιότητες ανάμεσα στα δεδομένα μεγέθη του προβλήματος, με τις οποίες μπορούμε να ανάγουμε τη ζητούμενη κατασκευή σε άλλες, που είναι ήδη γνωστές, δηλαδή επιδιώκουμε να δημιουργήσουμε ένα σχήμα, που να απορρέει από το αρχικό και να είναι 'κατασκευάσιμο'. Πρόκειται για μια διαδικασία 'αποδόμησης' του προς κατασκευή σχήματος, με μια πορεία 'από το άγνωστο προς το γνωστό'. Με βάση τα ευρήματα της ανάλυσης, ακολουθείται η αντίστροφη διαδικασία, της 'σύνθεσης', όπου οι επιμέρους κατασκευές, οδηγούν στη ζητούμενη, με πορεία αυτή τη φορά 'από τα γνωστά προς τα ζητούμενα'. Στη συνέχεια, είναι η τυπική 'απόδειξη' αυτή που θα επιβεβαιώσει την ορθότητα της κατασκευής και τέλος, η 'διερεύνηση', μελετά όλες τις περιπτώσεις που οι παράμετροι του προβλήματος επιτρέπουν ή όχι την κατασκευή, το πλήθος των δυνατών λύσεων και τις ειδικές περιπτώσεις.

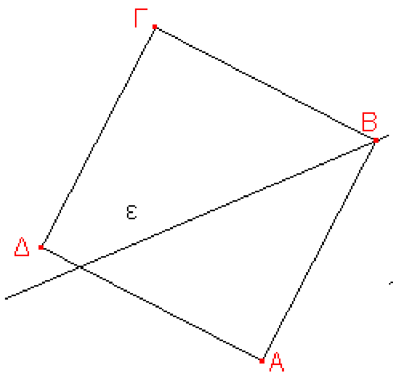
Στο Γυμνάσιο, τα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών είναι ελάχιστα και σε καμία περίπτωση δεν γίνεται χρήση της αναλυτικο-συνθετικής μεθόδου, η οποία επίσης σπάνια χρησιμοποιείται και στο Λύκειο. Η σημασία της μεθόδου αυτής, έχει υπογραμμισθεί, όχι μόνο για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, αλλά και για την ευρύτερη χρήση της, ως νοητικού εργαλείου. Επιπλέον, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ακόμα και η διαδικασία κατασκευής σχημάτων στα προβλήματα γεωμετρίας – κυρίως γυμνασίου – είναι ιδιαίτερα υποβαθμισμένη, καθώς στις περισσότερες ασκήσεις των σχολικών βιβλίων τα σχήματα δίνονται στους μαθητές.

Οι κατασκευές που χρησιμοποιούνται στις δραστηριότητες με χρήση DGS, ταξινομήθηκαν από την Healy [5] σε δυο είδη: (α) Οι 'ανθεκτικές' κατασκευές (robust constructions), οι οποίες έχουν συμπεριλάβει με σωστό τρόπο τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων και μέσω του συρσίματος ελέγχου διατηρούν τις ιδιότητες αυτές. Βοηθούν τον μαθητή να διακρίνει τις ιδιότητες που είναι συμπτωματικές (οπτικές) από αυτές που είναι απαραίτητες, καθώς και τις ιδιότητες που είναι πάντα αληθείς, από άλλες πιο ειδικές [8]. β) Οι 'εύπλαστες' κατασκευές (soft constructions), δεν συμπεριλαμβάνουν όλες τις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων, ή έχουν υλοποιηθεί 'οπτικά'. Για παράδειγμα, ένα τετράγωνο που παραμένει τετράγωνο καθώς σύρεται μια κορυφή του (γιατί μετακινούνται συγχρόνως και οι άλλες κορυφές του) αποτελεί μια 'ανθεκτική' κατασκευή, ενώ ένα τετράγωνο που μεταβάλλεται σε τυχαίο τετράπλευρο κατά το σύρσιμο μιας κορυφής του αποτελεί μια 'εύπλαστη' κατασκευή.

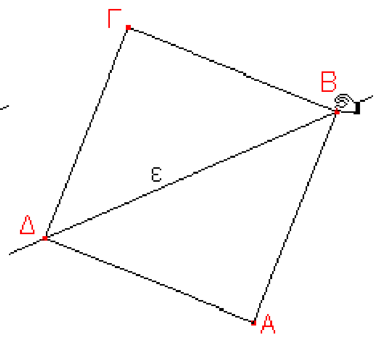
Ενώ μέχρι το 2000 οι 'ανθεκτικές' θεωρούνταν το βασικό πλεονέκτημα των DGS, σταδιακά άρχισε να αναδεικνύεται η σημασία των 'εύπλαστων', της συμπληρωματικότητάς τους με τις ανθεκτικές και της ανάγκης διδακτικής τους αξιοποίησης.

Ειδικότερα, σε ότι αφορά στην επίλυση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών, με χρήση της αναλυτικο-συνθετικής μεθόδου, η συμβολή των DGS δεν έχει μελετηθεί ιδιαίτερα. Αυτήν ακριβώς τη διάσταση, θελήσαμε να προσεγγίσουμε στην παρούσα εργασία, μέσα από ένα παράδειγμα που επιλέξαμε από τη βιβλιογραφία, ειδωμένο υπό αυτό το πρίσμα και επινοώντας μια ακόμα δραστηριότητα γεωμετρικής κατασκευής που περιγράφει ξεκάθαρα και ενισχύει τις θέσεις μας γύρω από αυτό το ζήτημα.

Κατά την επίλυση προβλημάτων κατασκευής με DGS, έχει επισημανθεί από τον Hölzl [6], η ανάδυση τελείως διαφορετικών στρατηγικών από τους μαθητές - σε σχέση με τις παραδοσιακές - μια εκ των οποίων περιγράφει στο άρθρο του "How does 'dragging' affect the learning of geometry": Η κατασκευή πραγματοποιείται από το πρώτο στάδιο, αλλά όχι πλήρως. Εάν οι συνθήκες είναι πολλές, *παραλείπεται προσωρινά μία από αυτές* και με τις υπόλοιπες υλοποιείται μια 'ημιτελής' κατασκευή που όμως ο δυναμικός χειρισμός της εμπεριέχει και κάποια 'πλήρη-σωστά' στιγμιότυπα. Το ίχνος θα αποκαλύψει σε ποια θέση βρίσκονται τα 'σωστά' στιγμιότυπα.

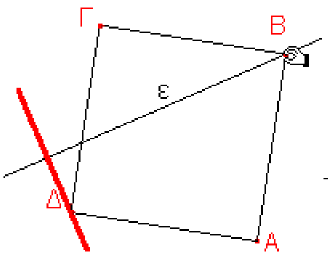


Σχήμα 1

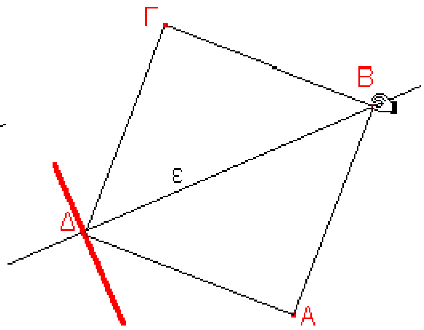


Σχήμα 2

Ο Hölzl διαπίστωσε τη δυνατότητα αυτή, μέσα από την εργασία δεκατετράχρονων μαθητών με το Cabri, στην ακόλουθη δραστηριότητα: "Να κατασκευασθεί τετράγωνο ΑΒΓΔ, του οποίου δίνεται μια κορυφή Α και η διαγώνιός του ΒΓ ανήκει σε δοσμένη ευθεία ε". Είναι ενδιαφέρουσα η προσέγγιση ενός μαθητή που περιγράφεται από τον Hölzl ως ακολούθως: κατασκευάζει τετράγωνο με μια κορυφή το Α και τη δεύτερη κορυφή του Β να είναι τυχαίο σημείο της διαγωνίου. Με την κατασκευή αυτή, ο μαθητής εγκαταλείπει την τρίτη προϋπόθεση, δηλαδή να ανήκει και το σημείο Δ στην ευθεία ε (σχήμα 1). Μετακινεί το Β πάνω στην ε έως ότου 'πετύχει' οπτικά την τρίτη προϋπόθεση (σχήμα 2). Το τετράγωνο που έχει κατασκευάσει, είναι μεταβλητής πλευράς, με μοναδικό σταθερό σημείο το Α και το Β να ‘ολισθαίνει’ πάνω στην ε. Πρόκειται δηλαδή - με όρους Healy [5]- για μια ‘εύπλαστη’ κατασκευή, που σε κάποια θέση του Β πληροί και την τρίτη προϋπόθεση, δηλαδή η διαγώνιος ΒΔ να ανήκει στην ε. Ο δικός μας σχολιασμός πάνω στη στρατηγική του μαθητή, είναι ότι αυτή η φάση, ουσιαστικά αντιστοιχεί στο ξεκίνημα της ‘ανάλυσης’, δηλαδή στην παραδοχή ότι το ζητούμενο σχήμα κατασκευάσθηκε.



Σχήμα 3



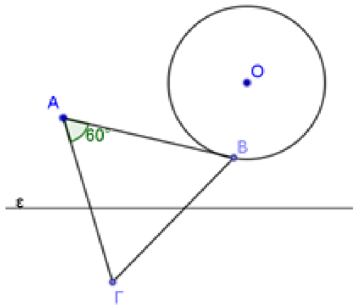
Σχήμα 4

Στη συνέχεια, ο Hölzl περιγράφει ότι ο μαθητής επαναλαμβάνει τη διαδικασία ενεργοποιώντας το ίχνος στην κορυφή Δ (dragging with trace activated κατά Baccaglini-Frank & Mariotti,) και παρατηρεί ότι το μονοπάτι που ακολουθεί, είναι μια ευθεία κάθετη στην ε (σχήμα 3), πάνω στην οποία οι διαφορετικές θέσεις του Δ, προκύπτουν από την περιστροφή του Β γύρω από το Α κατά 90ο, αναδεικνύοντας τη συμμετρία των Β και Δ ως προς τη διαγώνιο ΑΓ. Με αυτό τον τρόπο, οπτικά διαπιστώνει και τη συμμετρία των Α και Γ ως προς τη διαγώνιο ΒΔ (σχήμα 4), συνεπώς τη δυνατότητα κατασκευής του Γ. Έτσι, επανερχόμενοι στο σχολιασμό μας, βλέπουμε ότι η διαδικασία της ‘ανάλυσης’ υποβοηθάται από τη χρήση των εργαλείων, ως προς την εξεύρεση των ιδιοτήτων εκείνων που θα οδηγήσουν στη σύνθεση, απόδειξη και διερεύνηση του προβλήματος. Ωστόσο, καθώς η ενεργοποίηση του ίχνους είναι μια απόφαση που προϋποθέτει εξοικείωση των μαθητών με τα εργαλεία, όπως έχει δείξει η έρευνα των Baccaglini-Frank & Mariotti [2], σπάνια είναι αυθόρμητη και συνήθως προτείνεται από τον εκπαιδευτικό.

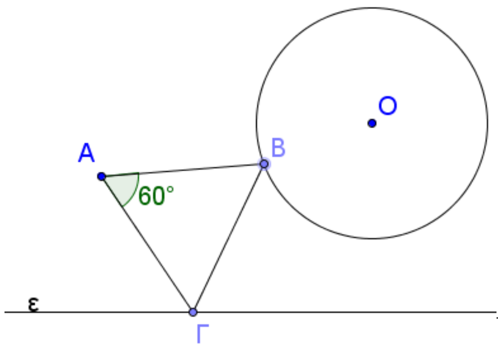
4 Προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών σε DGS: η περιστροφή ως μέθοδος επίλυσης

Δραστηριότητες DGS αντίστοιχου χαρακτήρα υπάρχουν πολλές και μπορούν να αξιοποιηθούν στο Α.Π.Σ. της Γεωμετρίας - κυρίως στο Λύκειο - με τις οποίες η χρήση της αναλυτικο-συνθετικής μεθόδου θα υποστηριχθεί από την αξιοποίηση των εργαλείων των DGS. Ενδεικτικά αναφέρουμε την ακόλουθη: “Να κατασκευασθεί ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου η μια κορυφή είναι δοσμένο σημείο Α, η κορυφή Β ανήκει σε κύκλο (Ο, ρ) και η κορυφή Γ σε ευθεία ε”. Η προτεινόμενη από εμάς στρατηγική επίλυσης - κατά το παράδειγμα του Hölzl -

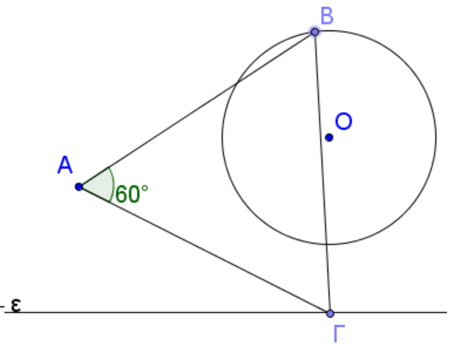
Σχήμα 5



είναι η ‘*παράλειψη της μιας από τις τρεις προϋποθέσεις*’ για την κατασκευή του ισοπλεύρου, δηλαδή η κατασκευή ενός ‘εύπλαστου-ημιτελούς’ ισοπλεύρου τριγώνου, μεταβλητής πλευράς, του οποίου η μια κορυφή είναι το Α και η άλλη τυχαίο σημείο Β του κύκλου (σχήμα 5). Ο μαθητής, σύροντας το Β πάνω στον κύκλο, αυξομειώνει την πλευρά του ισοπλεύρου και αλλάζει διαρκώς τη θέση του Γ στο επίπεδο, έως ότου το Γ γίνει - οπτικά- σημείο της ε, κάτι που φαίνεται να συμβαίνει σε δυο διαφορετικές θέσεις του Γ πάνω στην ε (σχήματα 6 και 7).

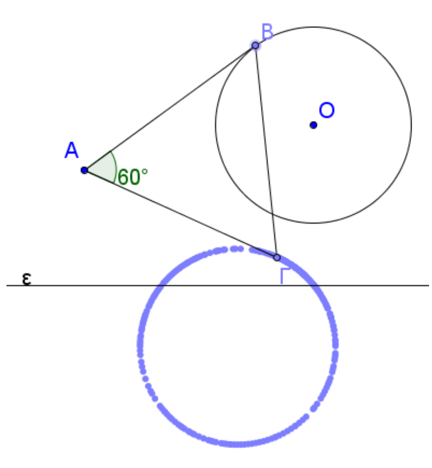


Σχήμα 6

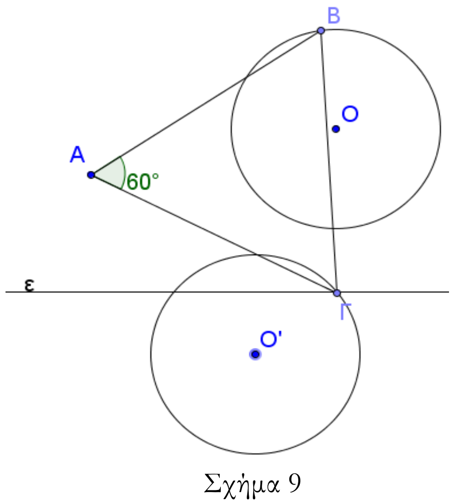


Σχήμα 7

Η φάση αυτή θα μπορούσε να αποτελέσει το ξεκίνημα της ‘ανάλυσης’ με το συγκριτικό πλεονέκτημα - σε σχέση με τα παραδοσιακά μέσα - ότι έχει ήδη προσδιορισθεί ότι οι λύσεις μπορούν να είναι και περισσότερες της μιας. Εδώ, τα εργαλεία μπορούν να συνεισφέρουν σημαντικά, καθώς μέσα από το σύρσιμο του Β, γίνεται εμφανές ότι οι διαδοχικές θέσεις του Γ προκύπτουν μέσω περιστροφής των αντίστοιχων του Β, γύρω από το Α κατά 60^{o}.



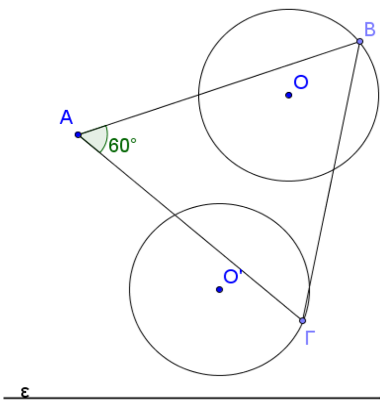
Σχήμα 8



Σχήμα 9

Η ενεργοποίηση του ίχνους του Γ, καθώς το Β κινείται πάνω στον κύκλο είναι η επόμενη στρατηγική (σχήμα 8), από την οποία φαίνεται ότι η κορυφή Γ κινείται πάνω σε κύκλο, οπτικά ίσο με τον (Ο, ρ). Η τομή αυτού του κύκλου με την ε, δίνει τις δυο θέσεις του Γ για τις οποίες πραγματοποιείται η κατασκευή. Συνεπώς, το πρόβλημα μετατίθεται στην εύρεση του κέντρου του κύκλου αυτού, ο οποίος εύκολα συνάγεται - με βάση τα προηγούμενα - ότι προκύπτει από την περιστροφή του (Ο, ρ) γύρω από το Α κατά 60^o, άρα το ίδιο θα συμβαίνει και για το κέντρο του Ο'. Η εικασία αυτή, μπορεί να επιβεβαιωθεί και με τα έτοιμα εργαλεία μετασχηματισμού των DGS. Η παραπάνω διαδικασία, κάνει εμφανή τη σχέση των Α, Ο και Ο', παρέχοντας όλο το απαιτούμενο υλικό για τη 'σύνθεση'. Ταυτόχρονα, η διερεύνηση του δυναμικού σχήματος, εκτός από τη δυνατότητα εύρεσης των δυο λύσεων, εξετάζει την επιλυσιμότητά του μέσω της αλλαγής της θέσης των σταθερών στοιχείων του σχήματος. Για παράδειγμα, η μεταφορά της ευθείας ε στο σχήμα 10, δεν επιτρέπει στον κύκλο (Ο', ρ) να τμήσει την ε και αναζητούνται οι συνθήκες επίλυσης του προβλήματος.

Τόσο στο παράδειγμα του Hölzl, όσο και σε αυτό του ισοπλεύρου τριγώνου, μέσα από το σύρσιμο αναδείχθηκε η δυνατότητα αξιοποίησης της περιστροφής ως μεθόδου για την επίλυση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών. Παράλληλα, προτάθηκε η στρατηγική της '*κατασκευής με παράλειψη προϋποθέσεων*', που δημιουργεί '*εύπλαστα*' σχήματα, η κίνηση των οποίων σταδιακά '*συμπληρώνει τις παραλήψεις*' και υποστηρίζει ισχυρά τη διαδικασία της 'ανάλυσης', συγκεντρώνοντας τα απαραίτητα στοιχεία για τη φάση της 'σύνθεσης'. Αναφερόμαστε λοιπόν, σε μια νέα γεωμετρία, τόσο σε σχέση με το περιεχόμενο, όσο και τις στρατηγικές που χρησιμοποιεί, η οποία μπορεί να μπορεί να λειτουργήσει υποστηρικτικά σε μεθόδους της ευκλείδειας γεωμετρίας, όπως την αναλυτικο-συνθετική, που αποτελεί εργαλείο για την ανθρώπινη σκέψη.



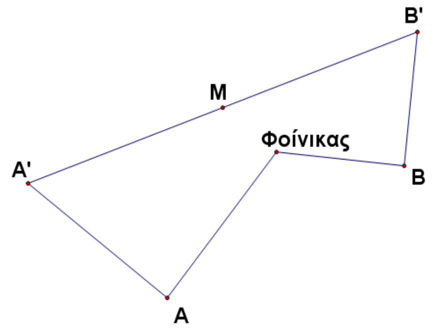
Σχήμα 10

5 Προβλήματα γεωμετρικών τόπων σε DGS

5.1 Το πρόβλημα του κρυμμένου θησαυρού: συμμετρία και περιστροφή ως μέθοδος επίλυσης

Το πρόβλημα αυτό αποτελεί κλασσικό παράδειγμα για την αξιοποίηση των DGS στην διδασκαλία των μαθηματικών (Τουμάσης - Αρβανίτης [18], Σογιούλ [17], Νικολουδάκης - Σπάθης [15]) εξαιτίας της 'μαγικής' απρόσμενης δυναμικής εικόνας που το συνοδεύει. Το πρόβλημα τέθηκε αρχικά από τον George Gamow το 1948 [3] και αναφέρει:

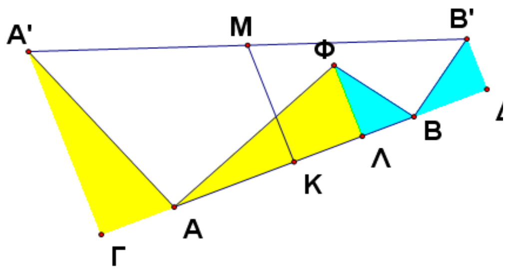
Ένας ξεχασμένος χάρτης στη σοφίτα ενός παππού (σχήμα 11), παριστάνει ένα έρημο νησί με έναν φοίνικα, μια φτελιά (σημείο Α) και μια βελανιδιά (σημείο Β), καθώς και το σημείο Μ όπου κάποιοι πειρατές έκρυψαν τον θησαυρό τους με τον εξής τρόπο: Ένας πειρατής μέτρησε τα βήματά του από τον φοίνικα προς την φτελιά, έπειτα έστριψε δεξιά 90^o και προχώρησε ίδιο πλήθος βημάτων καταλήγοντας στο σημείο Α΄. Όμοια κινήθηκε ένας δεύτερος πειρατής από τον φοίνικα προς την βελανιδιά, στρίβοντας όμως αριστερά στο σημείο Β, ο οποίος κατέληξε στο Β΄. Το μέσο Μ του Α΄Β΄ επιλέχθηκε ως το σημείο ταφής του θησαυρού. Μετά από χρόνια, ο εγγονός που βρήκε τον χάρτη στη σοφίτα του παππού του, μεταβαίνει στο νησί με σκοπό να ξεθάψει τον θησαυρό. Εκεί αντιμετωπίζει το εξής πρόβλημα: ο φοίνικας είχε καταστραφεί ολοσχερώς από κεραυνό και η θέση του ήταν αδύνατον να εντοπισθεί. Πώς είναι δυνατόν να ανακαλύψει τον θησαυρό μονάχα από τα άλλα δύο δέντρα;



Σχήμα 11

Η εικόνα είναι πραγματικά ‘μαγική’ σε περιβάλλοντα DGS: Σέρνοντας το σημείο Φ (η άγνωστη θέση του φοίνικα), οι θέσεις των Α΄, Β΄ επίσης μεταβάλλονται, όμως, το μέσο Μ του Α΄Β΄ παραμένει αμετακίνητο. Ώστε η θέση του δεν επηρεάζεται από την θέση του φοίνικα και ο ευτυχής εγγονός μπορεί να εντοπίσει τον θησαυρό από μια τυχαία θέση για το Φ!

Για το πρόβλημα προτάθηκαν διάφορες λύσεις (ιδιαίτερα ‘κομψή’ η πρόταση του Srinivasan [12] με την χρήση μιγαδικών). Η απλούστερη γεωμετρική λύση, συσχετίζει το Μ με τα άλλα δύο σταθερά σημεία του σχήματος, τα Α και Β, μέσω της ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων ΦΑΛ=ΑΑ΄Γ και ΦΒΛ=ΒΒ΄Δ, όπως σκιαγραφείται στο σχήμα 12.

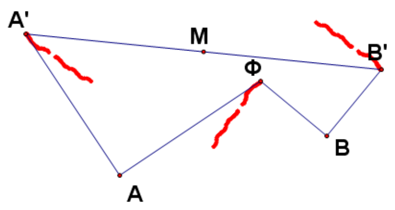


Σχήμα 12

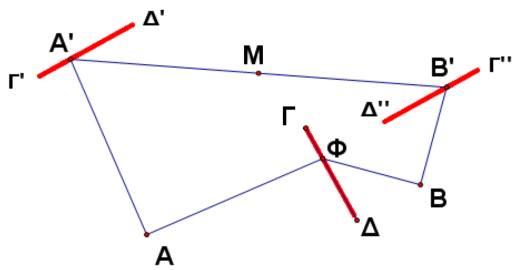
Όσο ‘μαγική’ ήταν η διατύπωση του προβλήματος σε περιβάλλον DGS, τόσο κραυγαλέα είναι η ‘απουσία’ του DGS στην επίλυσή του, τουλάχιστον μέχρι το σημείο να σχεδιαστούν οι προβολές όλων των σημείων στην ευθεία ΑΒ (σημεία Γ, Κ, Λ, Δ).

Η ενεργοποίηση όμως του ίχνους των Α΄, Β΄ σε πρώτη φάση, αποκαλύπτει ότι τα σημεία αυτά έχουν κέντρο συμμετρίας το Μ (φυσικά, αφού το Μ είναι το μέσο του Α΄Β΄). Αν όμως ενεργοποιηθεί και το ίχνος του Φ (συρόμενο σημείο), τότε αποκαλύπτεται η διπλή περιστροφή του Φ ως προς το Α κατά 90^o

αριστερόστροφα και ως προς το Β κατά 90^o δεξιόστροφα (σχήμα 13). Δεσμεύοντας το Φ σε τυχαίο τμήμα ΓΔ (σχήμα 14) οδηγούμαστε και στην τυπική απόδειξη: Τα τμήματα Γ'Δ' και Γ''Δ'' στα οποία κινούνται τα Α' και Β' αντίστοιχα, είναι ίσα και παράλληλα καθώς και τα δυο είναι ίσα και κάθετα με το ΓΔ. Οπότε το παραλληλόγραμμο Γ'Δ'Γ''Δ'' έχει ως κέντρο το Μ, ένα σταθερό σημείο (αν διατηρήσουμε το Γ σταθερό και το Δ μεταβαλλόμενο, είναι το μέσο του Γ'Γ'').



Σχήμα 13



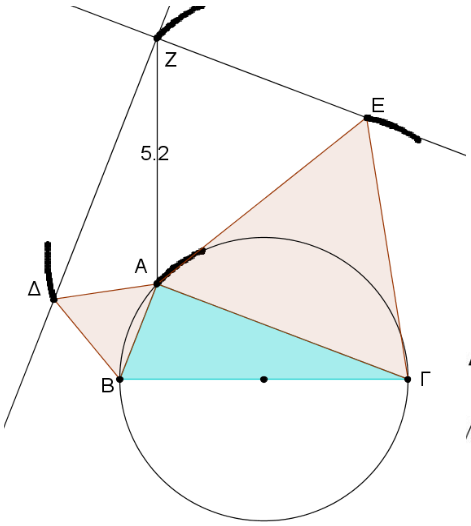
Σχήμα 14

Στην παραπάνω απόδειξη, το δεσμευμένο σύρσιμο του Φ και τα ίχνη των σημείων, ανέδειξαν τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς που κρύβονταν πίσω από την ‘μαγική’ εικόνα, αλλά και κάτι ακόμα: η κεντρική συμμετρία είναι δυνατόν να προκύψει ως σύνθεση δύο περιστροφών. Το «υπό ποιες γωνίες», μπορεί να διερευνηθεί περαιτέρω, όπως αναλύουν οι Νικολουδάκης και Σπάθης [15]. Ίσως να μην αναμένουμε οι μαθητές μας να εμπνευστούν καμία από τις δύο λύσεις που παρουσιάσαμε. Όμως η δεύτερη βασίζεται σε τεχνικές που είναι δυνατόν να διδαχθούν, αρκεί να λάβει χώρα ο κατάλληλος σχεδιασμός.

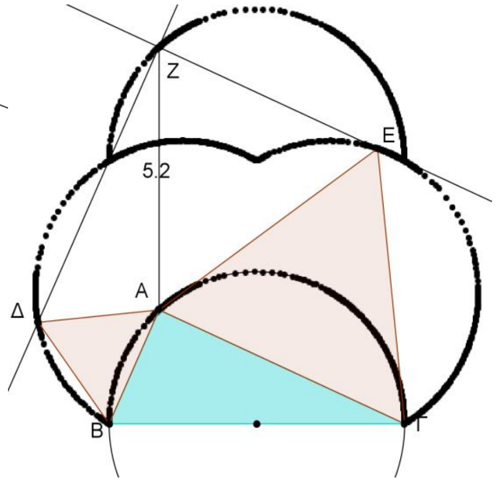
5.2 Ένα πρόβλημα με ορθογώνιο τρίγωνο: περιστροφή και μετατόπιση ως μέθοδος επίλυσης

Το δεύτερο πρόβλημα γεωμετρικού τόπου που επιλέξαμε συνδυάζει περιστροφή και μετατόπιση: Η κορυφή Α της ορθής γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ περιστρέφεται κατά 60^o γύρω από το Β αριστερόστροφα και κατά 60^o γύρω από το Γ δεξιόστροφα, δίνοντας τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα (σχήμα 15). Οι παράλληλες από το Δ προς την ΑΒ και από το Ε προς την ΑΓ τέμνονται στο Ζ. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος του Ζ εάν το Α κινηθεί στον κύκλο διαμέτρου ΒΓ;

Καθώς σέρνουμε το Α επάνω στον κύκλο, η δυναμική εικόνα υποδεικνύει πως το ΖΑ διατηρεί μήκος και προσανατολισμό (είναι πάντα κάθετο στο ΒΓ), άρα ο κύκλος που διαγράφει το Ζ είναι μια μετατόπιση του αρχικού κύκλου κατά διάνυσμα κάθετο στο ΒΓ. Η μετατόπιση γίνεται ακόμα πιο εμφανής όταν αποτυπώνεται το ίχνος των σημείων Α και Ζ.



Σχήμα 15



Σχήμα 16

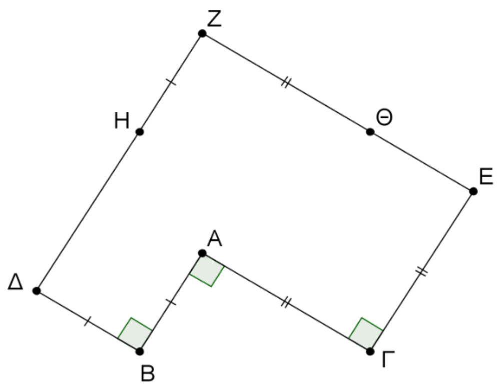
Εφόσον τα Δ και Ε προέκυψαν από περιστροφές του Α, κι αυτά διαγράφουν ίσους κύκλους με τον αρχικό. Μια πιο προσεκτική ματιά στους τέσσερις κύκλους και τα σημεία τομής τους (σχήμα 16) συμπληρώνει την εικόνα: Αν το ΒΓ περιστραφεί αριστερόστροφα γύρω από το Β και δεξιόστροφα γύρω από το Γ θα σχηματιστεί ισόπλευρο τρίγωνο που η τρίτη κορυφή, η απέναντι της ΒΓ, (το σημείο τομής των κύκλων που διαγράφουν τα Δ και Ε) είναι το κέντρο του μετατοπισμένου κύκλου (γεωμετρικός τόπος του Ζ). Το μέτρο της μετατόπισης εξάγεται από την απόσταση των κέντρων των δύο κύκλων (αρχικού και μετατοπισμένου), ίσο δηλαδή με $\frac{\text{ΒΓ}\sqrt{3}}{2}$. Ας παρατηρήσουμε εδώ πόσο σημαντικό ήταν να εστιάσουμε στις δύο περιστροφές του ΒΓ για να προδιορίσουμε το μέτρο της μετατόπισης και το κέντρο του ζητούμενου κύκλου, ώστε εν τέλει να είμαστε σε θέση να τον κατασκευάσουμε.

Μια παραλλαγή του παραπάνω προβλήματος είναι να μην απαιτήσουμε το ΒΓ να είναι διάμετρος, αλλά να είναι απλώς μια τυχαία χορδή ενός σταθερού κύκλου. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει μεταφορά, αλλά ομοιοθεσία, ενώ πάλι τα σημεία τομής των κύκλων είναι σημαντικά, καθώς προσδιορίζουν την θέση των άκρων της ομοιόθετης χορδής της ΒΓ και του μέσου της.

5.3 Η σύζευξη των δύο προβλημάτων γεωμετρικών τόπων

Ας θέσουμε ακόμα ένα πρόβλημα γεωμετρικού τόπου που ουσιαστικά συνδυάζει τα δύο προηγούμενα: Θεωρούμε κάθετα τμήματα ΑΒ και ΑΓ (σχήμα 17). Το σημείο Δ προκύπτει από την περιστροφή του Α γύρω από το Β κατά 90^o αριστερόστροφα, ενώ το σημείο Ε προκύπτει από την περιστροφή του Α γύρω από το Γ κατά 90^o δεξιόστροφα. Στα σημεία Δ και Ε φέρνουμε τις κάθετες στις

ΔΒ και ΕΓ αντίστοιχα, που τέμνονται στο Ζ. Λαμβάνοντας επί της ΔΖ σημείο Η με ΖΗ=ΑΒ και επί της ΖΕ σημείο Θ με ΖΘ=ΑΓ, διαπιστώνουμε σε περιβάλλον DGS πως κατά την κίνηση του Α σε ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ (ώστα να διατηρείται η καθετότητα των ΑΒ, ΑΓ), τα Η και Θ παραμένουν σταθερά. Γιατί; Αρκεί να εντοπίσουμε τα δύο 'κρυμμένα' τετράγωνα: Στο πρώτο οι τρεις κορυφές είναι τα μεταβλητά σημεία Δ, Ζ, Ε, ενώ στο δεύτερο οι κορυφές είναι τα σταθερά σημεία Η, Θ, Γ, Β. Και τα δυο έχουν κοινό κέντρο, το σημείο που οι πειρατές έκρυψαν τον θησαυρό τους (αν θεωρήσουμε ότι ο φοίνικας αντιστοιχεί στο σημείο Α).



Σχήμα 17

6 Συμπεράσματα

Οι δραστηριότητες στις οποίες αναφερθήκαμε - κάποιες μέσα από τη διεθνή έρευνα, ειδωμένες μέσα από τη δική μας οπτική και κάποιες που προτάθηκαν από εμάς - είχαν ως χαρακτηριστικό τη χρήση των εργαλείων των DGS ως αναπόσπαστου μέρους της διαδικασίας επίλυσης. Το «σύρσιμο με ενεργοποιημένο ίχνος» φαίνεται να είναι μια δυνατότητα των DGS, που σε συνδυασμό με την ύπαρξη ημιτελών – εύπλαστων κατασκευών, μπορεί να προσφέρει στο μαθητή πολύτιμα συνθετικά για την τυπική απόδειξη. Ταυτόχρονα, αναδεικνύει τους μετασχηματισμούς, ανάγοντάς τους σε μέθοδο για την επίλυση προβλημάτων γεωμετρικών τόπων και κατασκευών.

Εστιάσαμε ιδιαίτερα σε στρατηγικές αξιοποίησης των μετασχηματισμών, οι οποίες δεν συνηθίζονται στην παραδοσιακή μαθηματική τάξη και βέβαια δεν θα μπορούσαμε να ισχυρισθούμε ότι μπορούν να ενταχθούν με ευκολία σε αυτήν. Απαιτούν την εξοικείωση αρχικά των εκπαιδευτικών με τα εργαλεία, ώστε σταδιακά να εισαγάγουν τους μαθητές στη χρήση τους και στη συνέχεια να τους καταστήσουν ικανούς να αναπτύξουν αυτού του τύπου τις στρατηγικές επίλυσης. Η μύηση των μαθητών σε δραστηριότητες όπως αυτές στις οποίες αναφερθήκαμε, είναι μια μακρόπνοη διαδικασία που απαιτεί αντίστοιχες αλλαγές στα Π.Σ. των μαθηματικών. Ωστόσο, θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον η διερευνητική εφαρμογή τους στα Πειραματικά Σχολεία, ενδεχομένως στην αρχή σε επίπεδο ομίλων. Αναφέρουμε ενδεικτικά, το περιεχόμενο ενός τέτοιου ομίλου για το Λύκειο:

- Διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών με DGS (μεταφορά, συμμετρία ως προς άξονα, συμμετρία ως προς σημείο, περιστροφική συμμετρία, ομοιοθεσία).

- Σύνθεση σχημάτων από απλά με εφαρμογή μετασχηματισμών (για παράδειγμα συζήτηση για τον τρόπο κατασκευής των κανονικών πολυγώνων με διαδοχικές περιστροφές ενός ισοσκελούς τριγώνου γύρω από την κορυφή του)
- Οι μετασχηματισμοί ως εργαλείο προσδιορισμού γεωμετρικών τόπων (παραδείγματα όπως αυτά που εκθέσαμε στο παρόν άρθρο)
- Γεωμετρικές κατασκευές που αξιοποιούν τους μετασχηματισμούς (όπως όσα αναφέρθηκαν στο παρόν άρθρο, το πρόβλημα του Fagnano στο [16] και άλλα στα [13], [14])
- Ο μετασχηματισμός της αντιστροφής, Αρχιμήδους άρβυλος, προβλήματα του Απολλωνίου με εφαπτόμενους κύκλους.

Βιβλιογραφία

[1] Ferdinando Arzarello, Federica Olivero, Domingo Paola, Ornella Robutti, *A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments*, ZDM Mathematics Education (2002), 34 (3), 66-72.

[2] Anna Baccaglini-Frank, Maria-Alessandra Mariotti, Generating *Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model*, International Journal of Computers for Mathematics Learning (2010), 15, 225-253.

[3] George Gamow, *One, Two, Three...Infinity*, Viking Press (1947, 1961), επανέκδοση από *Dover Publications*, ISBN 978-0-486-25664-1

[4] Paul Goldenberg, Principles, *Art and Craft in Curriculum Design: The case of Connected Geometry*, International Journal of Computers for Mathematical Learning (1999), 4(2-3), 191-224.

[5] Lulu Healy, *Identifying and explaining geometric relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions*, Proceedings of the 24th conference of the IGPME, Hiroshima, Japan, (2000), v.1, 103–117.

[6] Reinhard Hölzl, *How does "dragging" affect the learning of Geometry*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, Kluwer Academic Publishers, Netherlands (1996), 1, 169-187.

[7] Colette Laborde, *The use of new technologies as a vehicle for reconstructing teachers' mathematics*, In F.-L. Lin, T.J. Cooney, (Eds), Making Sense of Mathematics Teacher Education, Kluwer Academic Publishers, Netherlands 2001, 87-109.

[8] Colette Laborde, *Robust and soft constructions*, Proceedings of the 10th Asian technology conference in mathematics, National University of Education, Korea, (2005), 22–35.

[9] Roza Leikin, Abraham Berman, Orit Zaslavsly, *Applications of symmetry to problem solving*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (2000), v.31, n.6, 799–809.

[10] Roza Leikin, *Problem-solving preferences of mathematics teachers: focusing on*

symmetry, Journal of Mathematics Teacher Education (2003), 6: 297–329.

[11] Allen Leung, *An epistemic model of task design in dynamic geometry environments*, ZDM Mathematics Education (2011), 43:325-336

[12] V. K. Srinivasan, *Classroom notes. A geometric application of complex numbers*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, (1983), 14:4, 521-527

[13] Ανδρέας Βαρβεράκης, *Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Κρήτης, 2006, http://www.math.uoc.gr:1080/erevna/diplomatikes/Varverakis_MDE.pdf

[14] Εμμανουήλ Λαμπράκης, *Η εκτέλεση ενός γεωμετρικού 'μαγικού' βήμα-βήμα,* (2012) Εργαστήριο Μαθηματικών ΠΠΣ Ηρακλείου, http://mathlab.mysch.gr/mathimata/geometriko_magiko.html

[15] Εμμανουήλ Νικολουδάκης, Μάριος Σπάθης, *Η συμβολή ενός λογισμικού DGS στη λύση προβλήματος*, Proceedings of the 5th Conference on Informatics in Education (2013), Πειραιάς.

[16] Πάρης Πάμφιλος, *Εισαγωγή στη Γεωμετρία*, Πανεπιστήμιο Κρήτης, 2010

[17] Αλκαίος Σογιούλ, *Το πρόβλημα του χαμένου θησαυρού*, https://docs.google.com/file/d/0B1CxOzLbCSlydEZIc3NPMmltLTg/edit?pli=1

[18] Μπάμπης Τουμάσης, Τάσος Αρβανίτης, *Διδασκαλία Μαθηματικών με χρήση Η/Υ*, Σαββάλας, Αθήνα, 2008.