Η απόδειξη ως διαδικασία, μέσα από ανοιχτές δραστηριότητες σε περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας

Καλογερία Ελισάβετ[1], Περυσινάκη Ειρήνη[2],

[1] Υποψ. Δρ. ΕΚΠΑ, Μαθηματικός, 3ο Γ/σιο Αργυρούπολης, Εργαστήριο Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας

ekaloger@ppp.uoa.gr

[2] Δρ. Μαθηματικός, Πρότυπο Πειραματικό Γεν. Λύκειο Ηρακλείου

iriniper@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία στοχεύει στην ανάπτυξη προβληματισμού, σχετικά με δραστηριότητες βασισμένες στην αξιοποίηση υπολογιστικών περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας (ΥΠΔΓ) για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας.

Η χρήση ΥΠΔΓ αποτελεί έναν από τους τρόπους με τους οποίους ο εκπαιδευτικός μπορεί να βοηθήσει να αρθούν παραδοσιακές δυσκολίες των μαθητών με την απόδειξη στη Γεωμετρία και να δημιουργήσει μαθησιακές καταστάσεις, που θα μυήσουν τον μαθητή σε διαδικασίες κατασκευής αποδείξεων. Για να αποκτήσει όμως η χρήση της τεχνολογίας πρόσθετη παιδαγωγική αξία και να έχει νόημα η επιλογή της έναντι των συμβατικών μέσων, είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να αντιλαμβάνεται την απόδειξη ως μια διαδικασία, που μεταξύ άλλων, περιλαμβάνει λειτουργίες διερεύνησης, επεξήγησης και κατασκευής, και όχι ως μια πρόταση που δίνεται στον μαθητή για να επιβεβαιώσει την αλήθεια της μέσω κατάλληλου συνδυασμού ορισμών και θεωρημάτων. Στη εργασία μας παρουσιάζουμε ανοιχτές δραστηριότητες σε ΥΠΔΓ και μελετάμε τη συμβολή τους στην ανάδειξη σημαντικών συνθετικών – λειτουργιών της απόδειξης, καθώς και τη δυνατότητα περαιτέρω διδακτικής αξιοποίησής τους από τον εκπαιδευτικό.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *Λειτουργίες* απόδειξης*, ανοιχτές δραστηριότητες,* ΥΠΔΓ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην εργασία αυτή επιχειρούμε να προσεγγίσουμε κριτικά το θέμα της επιλογής ή του σχεδιασμού δραστηριοτήτων με χρήση ΥΠΔΓ μέσα από δυο άξονες: ο πρώτος αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο ο εκπαιδευτικός αντιλαμβάνεται την απόδειξη (Καλογερία, 2007) και ο δεύτερος – άμεσα συνδεδεμένος με τον πρώτο - στο είδος των προβλημάτων ή καταστάσεων μέσω των οποίων επιχειρείται η εμπλοκή του μαθητή με την απόδειξη. Επιλέξαμε να ασχοληθούμε με το ζήτημα αυτό, κυρίως διότι ενώ η απόδειξη θεωρείται ως η «καρδιά» της διδασκαλίας της Γεωμετρίας, ωστόσο, οι μαθητές αντιμετωπίζουν πολύ σημαντικές δυσκολίες με αυτήν. Επιπρόσθετα, η αυξανόμενη τα τελευταία χρόνια χρήση της τεχνολογίας, θέτει πολύ σοβαρά ζητήματα σε σχέση με την παιδαγωγική της αξιοποίηση, δηλαδή τον σχεδιασμό κατάλληλων δραστηριοτήτων με πρόσθετη παιδαγωγική αξία ως προς τις παραδοσιακές διδακτικές μεθόδους και στην συνακόλουθη παροχή ευκαιριών στους μαθητές για άρση των δυσκολιών τους με την απόδειξη.

Ο Moore (1994) αναφέρει μια σειρά από λόγους για τους οποίους οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα με την κατασκευή αποδείξεων: Δεν γνωρίζουν τους ορισμούς ή δεν μπορούν να τους διατυπώσουν, έχουν μικρή διαισθητική κατανόηση των εννοιών και ανεπαρκείς εικόνες για αυτές, δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν δικά τους παραδείγματα, δεν μπορούν να χρησιμοποιούν τους ορισμούς για να αποκτήσουν μια συνολική δομή των αποδείξεων, δεν κατανοούν τη μαθηματική γλώσσα και συμβολισμό και δεν γνωρίζουν πώς να ξεκινήσουν μια απόδειξη. Παράλληλα, η λεπτή σχέση ανάμεσα στη διαισθητική γνώση και τη θεωρητική της συστηματοποίηση είναι ένα πρόβλημα που ο εκπαιδευτικός δυσκολεύεται να διαχειρισθεί. Οι μαθητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν το νέο σε σχέση με το παλιό και δεν μπορούν να καταλάβουν το λόγο για τον οποίο ιδιότητες που νομίζουν πως γνωρίζουν καλά τίθενται υπό αμφισβήτηση και θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν μακροσκελή επιχειρήματα για να τις υποστηρίξουν ενώ τους φαίνονται τόσο προφανείς (Mariotti, 2000). Σε κάθε περίπτωση, η διδασκαλία έχει σημαντικό μερίδιο ευθύνης για τις παραπάνω δυσκολίες, καθώς στην παραδοσιακή της μορφή παρέχει στους μαθητές ένα έτοιμο υλικό (ορισμούς, θεωρήματα, κατηγοριοποιήσεις), το οποίο τους ζητά να αφομοιώσουν και να αναπαράξουν στις εξετάσεις (de Villiers, 2004). Σε μια παραδοσιακή μαθηματική τάξη, ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να αποδείξουν μια μαθηματική πρόταση, χωρίς να τους εμπλέκει πιο πριν στο να κάνουν κάτι με αυτήν, ώστε να κατανοήσουν το λόγο της απόδειξής της. Η ακολουθία «ορισμός, θεώρημα, απόδειξη», αφήνει απέξω - ή καλύτερα δεν αναδεικνύει - σημαντικές πτυχές της σκέψης των μαθητών, όπως τη διαίσθηση, τη δοκιμή και πλάνη, το διαλογισμό, την υπόθεση και την εικασία (Almeida, 2001). Οι παραπάνω διεργασίες, θα μπορούσαν να μετατρέψουν την απόδειξη σε μια δραστηριότητα που να έχει νόημα για τους μαθητές, αλλά και να αποτελέσουν χρήσιμα συνθετικά και προπομπούς της μετάβασης του μαθητή προς την επίσημη μαθηματική απόδειξη. Με την προσθήκη αυτών των διεργασιών, η απόδειξη γίνεται περισσότερο αντιληπτή ως διαδικασία και όχι ως αποτέλεσμα, που έχει μοναδικό στόχο την επιβεβαίωση της αλήθειας μιας μαθηματικής πρότασης. Σε μια παραδοσιακή διδασκαλία, ο τελικός στόχος που είναι η επιβεβαίωση, φαίνεται να επισκιάζει άλλες, επίσης σημαντικές πτυχές της αποδεικτικής διαδικασίας, που κατά τον de Villiers (1999) είναι η επαλήθευση, η *επεξήγηση, η ανακάλυψη, η επικοινωνία, η διανοητική πρόκληση και η συστηματοποίηση*. Η *επαλήθευση* μιας μαθηματικής πρότασης για αρκετές διακριτές περιπτώσεις, είναι ένα πρώτο βήμα, καθώς δημιουργεί μια αρχική πεποίθηση για την αλήθεια της και παρέχει κίνητρο για απόδειξη. Σε αυτό το στάδιο μπορούν να συνδυασθούν ημι-εμπειρικές μέθοδοι, με διαίσθηση, με αντιπαραδείγματα και με λογικές (όχι απαραίτητα αυστηρές) αποδείξεις. Αυτά ωστόσο, δεν απαντούν ικανοποιητικά στο «γιατί». Έτσι, είναι σε αυτή τη φάση σημαντικό να εισαχθεί η λειτουργία της *επεξήγησης*, που θα δημιουργήσει μια βαθύτερη κατανόηση γύρω από τη μαθηματική πρόταση, χωρίς απαραίτητα να ακολουθεί την αυστηρή μαθηματική διατύπωση. Παράλληλα, δεν αρκεί η επιβεβαίωση μιας πρότασης που έχει ανακαλυφθεί από άλλους, αλλά η περαιτέρω επεξεργασία της, η *εξερεύνηση* και ανάλυσή της, με στόχο απώτερο την *ανακάλυψη* νέων ευρημάτων. Έχει επίσης αξία η συνομιλία γύρω από αυτά, ώστε να τεθούν σε κριτική δημόσια συζήτηση, δηλαδή η *επικοινωνία* ανάμεσα σε μαθηματικούς, μαθητές και καθηγητές, μαθητές με συμμαθητές τους. Παράλληλα, η *διανοητική πρόκληση* που παρέχει η εμπλοκή με μια μαθηματική απόδειξη, κατά τον de Villiers σχετίζεται με συναισθήματα αυτοπραγμάτωσης και εκπλήρωσης. Τέλος, η *συστηματοποίηση* είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένη με την απόδειξη, καθώς μέσω αυτής εντάσσονται διάφορα γνωστά αποτελέσματα σε ένα παραγωγικό σύστημα αξιωμάτων, ορισμών και θεωρημάτων. Η συστηματοποίηση δεν ελέγχει αν μια πρόταση είναι σωστή, αλλά οργανώνει με λογικό τρόπο μη συσχετισμένες, μεμονωμένες, ήδη γνωστές προτάσεις σε μια συνεκτική ενοποιημένη ολότητα. Με βάση τα παραπάνω, δημιουργείται από διδακτικής άποψης η πρόκληση για δημιουργία περιβαλλόντων που θα κινητοποιήσουν τον μαθητή και θα τον μυήσουν σε αυτές τις λειτουργίες της απόδειξης.

Τα ανοιχτά προβλήματα έχουν προταθεί από τη διεθνή βιβλιογραφία ως τα πλέον κατάλληλα για να εμπλέξουν τον μαθητή σε διερευνήσεις, παραγωγή εικασιών και τελικά επικύρωσή τους. Ως ανοιχτά προβλήματα, οι Martin et al (2005) ορίζουν αυτά που δεν έχουν απαραίτητα μοναδική λύση ή στρατηγική επίλυσης και κατά τους Arsac et al (1988) έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: (α) η δήλωσή τους είναι σύντομη, άρα εύκολα αντιληπτή, ώστε να ενδυναμώνουν τη διερεύνηση και όλοι οι μαθητές να είναι σε θέση να ξεκινήσουν τη διαδικασία επίλυσής τους, (β) η δήλωσή τους δεν προδίδει τη μέθοδο επίλυσης, αλλά κινητοποιεί τη διαδικασία παραγωγής εικασιών και (γ) τοποθετούνται σε ένα εννοιολογικό πεδίο με το οποίο οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι, άρα μπορούν να «πάρουν στα χέρια τους» την κατάσταση και να εμπλακούν σε προσπάθειες δημιουργίας εικασιών, σχεδιασμού διαδρομών επίλυσης και εύρεσης αντιπαραδειγμάτων σε λογικό χρονικό διάστημα. Οι Furinghetti et al (2001) αναφέρουν διάφορους τύπους ανοιχτών δραστηριοτήτων που περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων διερευνήσεις, καταστάσεις καθημερινής ζωής, projects, προβλήματα χωρίς ερωτήσεις και επίλυση προβλήματος. Διαχωρίζουν την επίλυση προβλήματος από τη διερεύνηση, θεωρώντας την πρώτη ως μια συγκλίνουσα δράση, όπου οι μαθητές πρέπει να βρουν μια λύση για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, ενώ τη δεύτερη ως αποκλίνουσα δράση, όπου οι μαθητές ενθαρρύνονται να σκεφθούν εναλλακτικές στρατηγικές, τι θα συνέβαινε αν ακολουθείτο μια συγκεκριμένη πορεία ή ακόμα, να βρουν αν διαφορετικές προσεγγίσεις θα παράξουν διαφορετικά αποτελέσματα.

Ενισχυτική σε αυτή την κατεύθυνση θεωρείται η χρήση ΥΠΔΓ, καθώς δίνουν τη δυνατότητα παραγωγής εικασιών μέσω παρατήρησης και ελέγχου πλήθους περιπτώσεων, εξερευνήσεων, διερευνήσεων για ανακάλυψη νέων ιδιοτήτων, κατασκευών με ακρίβεια, αλλά και ελέγχου των εικασιών (Hanna, 2000). Μέσω της χρήσης των εργαλείων, ο μαθητής μπορεί να συνδυάσει το θεωρητικό κομμάτι της γεωμετρίας με το οπτικό - χωρικό της, προσομοιάζοντας και μοντελοποιώντας τομείς της πραγματικότητας με γεωμετρικούς όρους, δίνοντας έτσι, νέο νόημα στη γεωμετρία

(Laborde and Laborde, 1993). Η εργασία σε ένα ΥΠΔΓ παρέχει στον μαθητή ισχυρές ενδείξεις για την αλήθεια μιας μαθηματικής πρότασης, ωστόσο, σε αυτό το σημείο, είναι σημαντική η παρέμβαση του εκπαιδευτικού, ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν ότι η εξερεύνηση δεν συνιστά απόδειξη και ότι η απόδειξη είναι ο μόνος δρόμος για να εξηγήσουν γιατί οι εικασίες τους έχουν θέση μέσα σε μια συγκεκριμένη θεωρία (Furinghetti and Paola, 2003). Η βασική λειτουργία παραγωγής εικασιών είναι το σύρσιμο. Οι Arzarello et al (2002) προσδιόρισαν 7 διαφορετικά είδη συρσίματος των μαθητών, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας: 1. Περιπλανητικό: μετακινώντας με τυχαίο τρόπο τα βασικά σημεία πάνω στην οθόνη, χωρίς κάποιο πλάνο, προσπαθούν να ανακαλύψουν ενδιαφέρουσες διαμορφώσεις ή κανονικότητες στα σχήματα 2. Δεσμευμένο: μετακινώντας ένα «ημι-συρόμενο» σημείο (είναι ήδη συνδεδεμένο με ένα αντικείμενο) 3. Καθοδηγούμενο: μετακινώντας τα βασικά σημεία του σχήματος, προσπαθούν να του δώσουν ένα συγκεκριμένο σχήμα 4. Σύρσιμο κρυφού γεωμετρικού τόπου: μετακινώντας ένα βασικό σημείο ώστε το σχήμα να διατηρεί μια ιδιότητα που έχει ανακαλυφθεί. Το σημείο που μετακινείται ακολουθεί ένα μονοπάτι, ακόμα και αν οι χρήστες δεν το συνειδητοποιούν: ο τόπος δεν είναι ορατός και δεν 'μιλάει' στους μαθητές, που δεν συνειδητοποιούν ότι σύρουν κατά μήκος ενός τόπου 5. Σύρσιμο γραμμής: σχεδιάζοντας νέα σημεία κατά μήκος μιας γραμμής προσπαθούν να διατηρήσουν την κανονικότητα του σχήματος 6. Συνδεδεμένο: συνδέοντας ένα σημείο με ένα αντικείμενο και μετακινώντας το πάνω σε αυτό το αντικείμενο 7. Σύρσιμο ελέγχου: μετακινώντας συρόμενα ή ημι-συρόμενα σημεία, ώστε να δουν αν το σχήμα διατηρεί τις αρχικές του ιδιότητες. Τα τρία πρώτα είδη, αντιστοιχούν σε φάσεις κατά τις οποίες ο μαθητής αναζητά κανονικότητες, σταθερές και συνδέσεις με κάποια θεωρία και δημιουργεί εικασίες. Από το τέταρτο και μετά σηματοδοτείται η μετάβαση προς την τυπική απόδειξη.

Η Laborde (2001) διακρίνει τέσσερις τύπους δραστηριοτήτων που χρησιμοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς με τα ΥΠΔΓ: 1) Δραστηριότητες στις οποίες το περιβάλλον διευκολύνει τις υλικές ενέργειες αλλά δεν αλλάζει τη φύση της δράσης των μαθητών (πχ παράγοντας σχήματα και μετρώντας τα στοιχεία τους). 2) Δραστηριότητες στις οποίες το περιβάλλον διευκολύνει την εξερεύνηση και ανάλυση των μαθητών (πχ προσδιορίζοντας σχέσεις μέσα σε ένα σχήμα μέσω του συρσίματος). 3) Δραστηριότητες που μπορούν να λυθούν με χαρτί και μολύβι, αλλά μπορούν να επιλυθούν διαφορετικά στο ΥΠΔΓ (πχ μια κατασκευαστική δραστηριότητα μπορεί να λυθεί στο ΥΠΔΓ χρησιμοποιώντας ένα γεωμετρικό μετασχηματισμό, κατασκευή τετραγώνου με περιστροφή). 4) Δραστηριότητες που δεν μπορούν να τεθούν χωρίς τη μεσολάβηση του ΥΠΔΓ (πχ black box).

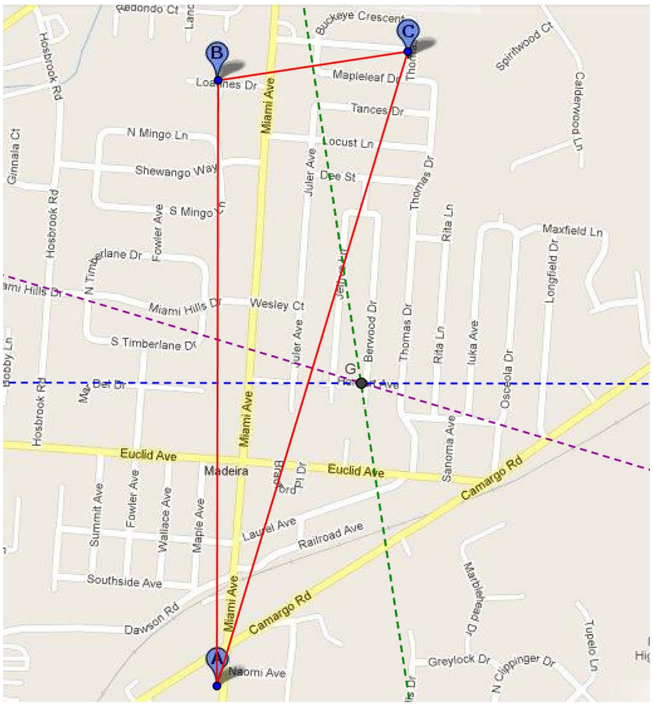
Με βάση το σκεπτικό που αναπτύχθηκε παραπάνω, θελήσαμε να μελετήσουμε δραστηριότητες – προβλήματα από διάφορες κατηγορίες, που αντλήσαμε από τη βιβλιογραφία ή σχεδιάσαμε εμείς, σε σχέση: (α) με το είδος τους (ανοιχτά - κλειστά), (β) με της λειτουργίες της απόδειξης που εμπλέκουν και (γ) με τον τρόπο αξιοποίησης των εργαλείων του ΥΠΔΓ και των ειδών συρσίματος που συνοδεύουν τις φάσεις της αποδεικτικής διαδικασίας. Στόχος μας είναι το άνοιγμα διαλόγου γύρω από το θέμα αυτό και η διαμόρφωση κριτηρίων για το σχεδιασμό ή την επιλογή δραστηριοτήτων που επιδιώκουν την εμπλοκή των μαθητών με την αποδεικτική διαδικασία μέσω εργασίας σε ΥΠΔΓ.

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ – ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

Δραστηριότητα 1η: το πέρασμα από τη «συνταγή» στη διερεύνηση

Οι παραδοσιακές αποδείξεις, έχουν μια μορφή «συνταγής» και δυστυχώς αυτό συχνά διατηρείται και στις διερευνήσεις με ΥΠΔΓ, όπως σωστά παρατηρούν οι Harper και Edward (2011). Χαρακτηριστική είναι η περίπτωση του περίκεντρου τριγώνου: Με τον παραδοσιακό τρόπο, ο καθηγητής δίνει στους μαθητές του ένα τυχαίο τρίγωνο, ζητά να σχεδιάσουν τις μεσοκαθέτους δύο μόνο πλευρών του, να παρατηρήσουν ότι αυτές τέμνονται σε ένα σημείο, να εξηγήσουν πρώτα γιατί το σημείο αυτό είναι και σημείο της μεσοκαθέτου της τρίτης πλευράς (άρα οι τρεις μεσοκάθετοι συντρέχουν) και έπειτα γιατί ισαπέχει κι από τις τρεις κορυφές του τριγώνου. Συνεπώς, με κέντρο το σημείο αυτό και ακτίνα την απόστασή του από τις κορυφές του τριγώνου μπορεί να σχεδιαστεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τρεις κορυφές του τριγώνου. Ως εκ τούτου, ο κύκλος καλείται «περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου» και το κέντρο του «περίκεντρο του τριγώνου». Η μοναδική παραλλαγή της δραστηριότητας με ΥΠΔΓ είναι το σύρσιμο των κορυφών του τριγώνου στο τέλος, έτσι ώστε να φανεί δυναμικά η ορθότητα της κατασκευής του περίκεντρου και του περιγεγραμμένου κύκλου, ενός κύκλου που εξακολουθεί να διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου, παρόλο που αυτές αλλάζουν θέση με το σύρσιμο. Το πολύ-πολύ να τεθεί το ανοιχτό ερώτημα «πότε το περίκεντρο βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου, πότε σε πλευρά του και πότε εκτός του τριγώνου»; Σε ό,τι αφορά στην κατασκευή του περίκεντρου, δεν υπάρχει ουσιαστική διαφοροποίηση από τον παραδοσιακό τρόπο, η διαδικασία εξακολουθεί να θυμίζει «συνταγή». Οι Harper και Edward (2011) προτείνουν να δοθεί ένα πρόβλημα με περιεχόμενο από τον πραγματικό κόσμο, που θα ελκύει το ενδιαφέρον των μαθητών, θα επιτρέπει την διερεύνηση και θα επιδέχεται πολλαπλές λύσεις ώστε να είναι βάσιμος ο λόγος να μοιραστούν οι μαθητές την εργασία τους.

Στο περιβάλλον του λογισμικού GeoGebra έχει επικολληθεί ο παρακάτω χάρτης και η εκφώνηση ενός προβλήματος επιλογής σπιτιού: «*Ο ξάδελφος σας σκοπεύει να μετακομίσει στο Madeira, Ohio. Οι γονείς του θέλουν ένα σπίτι που να ισαπέχει από το Δημοτικό, το Γυμνάσιο και το Λύκειο (που σημειώνονται στο χάρτη ως σημεία A, B και C αντίστοιχα). Εντοπίστε μια τέτοια τοποθεσία (ή τοποθεσίες) στον χάρτη. Έπειτα, γράψτε ένα e-mail όπου θα περιγράφετε το πώς εντοπίσατε το σημείο όπου η οικογένεια του ξαδέλφου σας πρέπει να μείνει. Να είστε έτοιμοι να παρουσιάσετε στην τάξη την κατασκευή σας, προβάλλοντας το Πρωτόκολλο κατασκευής χρησιμοποιώντας το GeoGebra*».

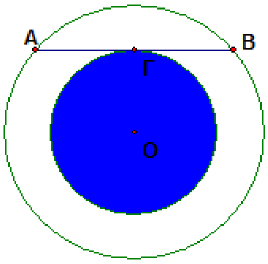


Σχεδόν όλοι οι μαθητές που καταπιάστηκαν με αυτό, ξεκινούσαν με τον σχεδιασμό του τριγώνου ABC και των τριών διαμέσων του, καθώς υπέθεταν εσφαλμένα ότι η ζητούμενη τοποθεσία θα βρίσκεται στο σημείο τομής τους, το βαρύκεντρο του τριγώνου. Οι μετρήσεις όμως με το λογισμικό διέψευδαν την εικασία τους, οπότε θα έπρεπε να γίνουν πιο ευρηματικοί. Η εργασία διερεύνησης των μαθητών περιγράφεται διεξοδικά στο επόμενο ηλεκτρονικό μήνυμα που έστειλε ένας μαθητής στον υποτιθέμενο ξάδελφο του: «*Άκουσα ότι ψάχνετε να αγοράσετε ένα σπίτι σε ίσες αποστάσεις από το Δημοτικό, το Γυμνάσιο και το Λύκειο. Νομίζω πως το βρήκα! Ξεκίνησα ψάχνοντας τοποθεσίες σε ίσες αποστάσεις από το Δημοτικό (C) και το Γυμνάσιο (A) -οποιοδήποτε σημείο στην μωβ διακεκομμένη γραμμή. Έκανα το ίδιο για το Λύκειο (B) και το Δημοτικό (C) -οποιοδήποτε σημείο στην πράσινη διακεκομμένη γραμμή. Αυτές τέμνονται στο G. Έλεγξα την εργασία μου βρίσκοντας σημεία σε ίσες αποστάσεις από Γυμνάσιο και Λύκειο και βρήκα την μπλε διακεκομμένη γραμμή που τέμνεται στο Γ επίσης! Λοιπόν, θα πρέπει να ψάξετε για σπίτι στην διασταύρωση των Homart Ave και Berwood Drive. Χαρούμενο Κυνήγι Σπιτιού!*»

Το γεγονός ότι η θέση του σπιτιού δεν είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου εντυπωσίασε και προβλημάτισε τους μαθητές. Ποια όμως ήταν τα στοιχεία του προβλήματος που το μετέβαλαν από «συνταγή» σε διερεύνηση και ποια η συμβολή του λογισμικού; Καταρχάς, η διερεύνηση αφορά μια ρεαλιστική προβληματική κατάσταση, που κινεί το ενδιαφέρον των μαθητών. Η φράση του μαθητή «ξεκίνησα ψάχνοντας τοποθεσίες σε ίσες αποστάσεις από το Δημοτικό (C) και το Γυμνάσιο (A)», φανερώνει έναν πειραματισμό που πραγματοποίησε, πιθανότατα με κάποιο ελεύθερο σημείο το οποίο θα έσερνε με τέτοιο τρόπο ώστε οι αποστάσεις του από τα A και C να διατηρούνται ίσες. Παρακολουθώντας την τροχιά του σημείου (για παράδειγμα ενεργοποιώντας το ίχνος του), θα παρατήρησε πως κινείται επάνω στην μεσοκάθετο του τμήματος AC, την οποία στη συνέχεια θα σχεδίασε με τα εργαλεία του λογισμικού, ίσως μάλιστα και να έλεγξε πως κάθε σημείο της ισαπέχει από τα A και C. Μια απλή γενίκευση τον οδηγεί στον σχεδιασμό και των άλλων δυο μεσοκαθέτων και στον προσδιορισμό της θέσης του σπιτιού. Ας παρατηρήσουμε ακόμα τον ενθουσιώδη τόνο του μηνύματος, τόσο για την ανακάλυψη της θέσης, όσο και για την επινόηση της μεθόδου. Ο μαθητής συνειδητοποιεί πλήρως την αιτία της επιτυχίας του: πέρασε από την πολύ περιοριστική αναζήτηση ενός σημείου που να ισαπέχει από τρία σημεία, τα A, B και C στην λιγότερο περιοριστική αναζήτηση σημείων που ισαπέχουν μονάχα από δύο σημεία, τα A και C. Το λογισμικό τον βοήθησε σ' αυτήν την ανακάλυψη, «φανερώνοντας» σχήματα, ιδιότητες, σημεία. Γίνεται έτσι πλήρως κατανοητό το γιατί πρέπει να σχεδιαστούν οι τρεις μεσοκάθετοι, ενώ αντίθετα, με τον παραδοσιακό τρόπο ο σχεδιασμός τους έρχεται «από το πουθενά».

Δραστηριότητα 2η: μοντελοποίηση πραγματικού προβλήματος

Σε μαθητές της Β΄ Τάξης Γεν. Λυκείου δόθηκε το πρόβλημα (Ritemaths - Annulus Area Problem): *Ένας κηπουρός θέλει να υπολογίσει την επιφάνεια ενός κυκλικού κήπου όπου στο κέντρο του βρίσκεται μια επίσης κυκλική λίμνη. Με την κορδέλα του μετρά την απόσταση από ένα σημείο της περίφραξής του Α, μέχρι ένα άλλο σημείο της περίφραξής του Β, έτσι ώστε η κορδέλα απλώς να ακουμπήσει την όχθη της λίμνης σε ένα μοναδικό σημείο. Είναι αρκετή αυτή η μέτρηση για τον υπολογισμό της επιφάνειας του κήπου χωρίς τη λίμνη;*



Σχήμα 1

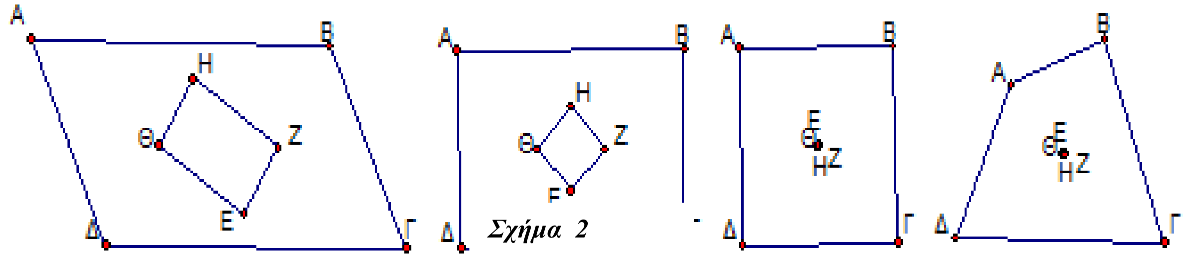
Αν και το πρόβλημα (σχ.1) κέντρισε αμέσως το ενδιαφέρον των μαθητών, ως πρόβλημα του πραγματικού κόσμου, η μία αντίρρηση διαδέχθηκε την άλλη: Ποιος εξασφαλίζει ότι αν το Α αλλάξει θέση στον εξωτερικό κύκλο η αντίστοιχη χορδή ΑΒ δεν θα αλλάξει μήκος; Γιατί να αρκεί μόνο μια μέτρηση όταν ο τύπος του εμβαδού κυκλικού δακτυλίου περιέχει δύο παραμέτρους, τις ακτίνες των δύο κύκλων; Η ισχυρότερη αντίρρηση όμως βασίστηκε στην παρατήρηση ότι υπάρχουν «μεγάλοι» και «μικροί» κήποι με την ίδια χορδή ΑΒ. Σχεδόν με βεβαιότητα οι μαθητές υποστήριζαν ότι μια και μοναδική μέτρηση δεν αρκούσε και άρχισαν να αναζητούν μια πλήρη ρεαλιστική λύση.

Αυτήν ακριβώς την παράδοξη εικόνα των «μεγάλων» και «μικρών» κήπων με την ίδια χορδή ΑΒ αξιοποιήσαμε για τη δημιουργία ενός μικρόκοσμου διερεύνησης του προβλήματος με χρήση ΥΠΔΓ. Στον πειραματισμό, η χορδή ΑΒ παρέμενε σταθερή, ενώ το κοινό κέντρο μπορούσε να συρθεί κατά μήκος της μεσοκαθέτου της. Αυτό το σύρσιμο αποκάλυψε ένα σημαντικό στοιχείο: δεν ήταν μονάχα ο εξωτερικός κύκλος που αυξομειωνόταν, αλλά και ο εσωτερικός. Μάλιστα, όταν μεγάλωνε ο ένας μεγάλωνε και ο άλλος -οι ακτίνες τους συμμεταβάλονταν. Κατόπιν τούτου, οι αντιρρήσεις άρχισαν να κάμπτονται και δημιουργήθηκε η ανάγκη να επανεξετάσουν την ορθότητα της μεθόδου του κηπουρού. Με την χρήση των υπολογιστικών εργαλείων του λογισμικού, οι μαθητές υπολόγισαν το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου και έκπληκτοι διαπίστωσαν ότι αυτό δεν άλλαζε. Η ερμηνεία δόθηκε με το Πυθαγόρειο Θεώρημα, συσχέτισαν τα τρία μεγέθη (τις δύο ακτίνες και τη μισή χορδή ΑΒ) ως πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου.

Τα στοιχεία που διαφοροποιούν την παραπάνω δραστηριότητα από ένα παραδοσιακό πρόβλημα είναι ότι τίθεται ένα ερώτημα που αφορά μια πραγματική κατάσταση, φαινομενικά αδιέξοδη και χωρίς προφανή απάντηση. Ο δυναμικός χειρισμός του σχήματος έρχεται αφενός να αναδείξει την πολυπλοκότητα του προβλήματος (υπάρχουν πολλοί κήποι με την ίδια χορδή ΑΒ) και αφετέρου να φωτίσει στοιχεία και σχέσεις που το στατικό σχήμα αποκρύπτει (τη συμμεταβολή των δύο ακτινών, όταν διατηρείται σταθερό το ΑΒ). Τέλος, ο υπολογισμός ενισχύει την ορθότητα του ισχυρισμού ότι αν γνωρίζουμε το μήκος της χορδής ΑΒ, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του δακτυλίου-κήπου. Η ανάγκη για λογική ερμηνεία του ανέλπιστου φαινομένου να διατηρείται το εμβαδόν σε ένα μεταβλητό σχήμα, οδηγεί στον αλγεβρικό συσχετισμό της χορδής με τις ακτίνες των κύκλων, δηλαδή την ανακάλυψη ενός τύπου, που δεν δόθηκε εξαρχής προς απόδειξη-επαλήθευση.

Δραστηριότητα 3η: Συμμεταβολή σχημάτων

Τα βιβλία των μαθηματικών περιλαμβάνουν μια σειρά γεωμετρικών προτάσεων προς απόδειξη, όπως οι παρακάτω: «Δείξτε ότι ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν και μόνο αν οι διχοτόμοι του συντρέχουν», «Δείξτε ότι αν γωνίες Β και Δ ενός τετραπλεύρου είναι ίσες, τότε το τετράπλευρο που σχηματίζουν οι διχοτόμοι του είναι τραπέζιο», «Δείξτε ότι το τετράπλευρο που σχηματίζουν οι διχοτόμοι ενός παραλληλογράμμου είναι ορθογώνιο», «Δείξτε ότι το τετράπλευρο που σχηματίζουν οι διχοτόμοι ενός ορθογωνίου είναι τετράγωνο» «Αν σε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ=2ΑΔ, τότε οι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β τέμνονται σε σημείο της ΓΔ και το τετράπλευρο που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των γωνιών του ΑΒΓΔ τεμνόμενες ανά δυο διαδοχικές, είναι τετράγωνο». Σε ένα ΥΠΔΓ, όλες οι παραπάνω προτάσεις μπορούν να ενσωματωθούν στη διερεύνηση ενός προβλήματος συμμεταβολής. Στους μαθητές δίνεται ένα έτοιμο αρχείο (ή καλούνται να το κατασκευάσουν) με ένα τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, τις διχοτόμους των γωνιών του, που ανά δυο διαδοχικές ορίζουν ένα τετράπλευρο ΕΖΗΘ και ζητείται από αυτούς να μεταβάλλουν το ΑΒΓΔ σύροντας τις κορυφές του και να διαπιστώσουν τι είδους τετράπλευρο είναι το ΕΖΗΘ για τις διάφορες μορφές του ΑΒΓΔ. Η διερεύνηση γίνεται ακόμα πιο ενδιαφέρουσα, αν στους μαθητές δοθεί έτοιμο αρχείο, στο οποίο έχουμε πιο πριν αποκρύψει τις ευθείες των διχοτόμων και έχουμε αφήσει μόνο τα δυο τετράπλευρα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μια δραστηριότητα black box, όπου οι μαθητές πρέπει



Σχήμα 2

εκτός των άλλων να ανακαλύψουν πώς έχει κατασκευασθεί το ΕΖΗΘ. Η έρευνα της Olivero (1999) σε 27 μαθητές 15 ετών έδειξε την ακόλουθη αλληλουχία κατά την εργασία των μαθητών με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα:

1η φάση: *πειράματα, δημιουργία εικασιών*

- Μετακινούν τυχαία τις κορυφές Α, Β, Γ, Δ (περιπλανητικό σύρσιμο).
- Διαμορφώνουν στο μυαλό τους ένα κανόνα (καθοδηγούμενο σύρσιμο, ώστε να πετύχουν τα παρακάτω σχήματα):
  - Όταν το ΑΒΓΔ είναι παραλ/μο, το ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο
  - Όταν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, το ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο
  - Όταν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, το ΕΖΗΘ είναι ένα σημείο

2η φάση: *εξερεύνηση με συγκεκριμένο σκοπό*

- Μόλις το ΕΖΗΘ γίνει σημείο, το θεωρούν πολύ ενδιαφέρον και μετακινούν τα Α,Β,Γ,Δ (χαλώντας το τετράγωνο) ώστε τα Ε, Ζ, Η, Θ να εξακολουθούν να ταυτίζονται (σύρσιμο κρυφού γεωμετρικού τόπου, για να διατηρήσουν την ιδιότητα που βρήκαν)
- Διαπιστώνουν ότι τα Ε, Ζ, Η, Θ ταυτίζονται και για άλλα είδη τετραπλεύρων ΑΒΓΔ.
- Εικάζουν ότι όλα αυτά τα τετράπλευρα έχουν κοινή ιδιότητα

3η φάση: *ανακάλυψη κανονικοτήτων - απαγωγή: εύρεση κανόνα*

- Παρατηρούν τις μετρήσεις των πλευρών καθώς αλλάζουν με το σύρσιμο
- Βλέπουν ότι τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών είναι ίσα
- Θυμούνται ότι αυτή είναι χαρακτηριστική ιδιότητα των περιγράψιμων σε κύκλο τετραπλεύρων

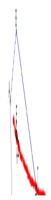
4η φάση: *έλεγχος της απαγωγικής υπόθεσης, αντιστροφή της ροής της σκέψης*

- Κατασκευάζουν τις κάθετες από το σημείο τομής προς τις πλευρές, μετρούν, βλέπουν ότι το σημείο ισαπέχει από τις πλευρές του τετραπλεύρου
- Σχεδιάζουν τον εγγεγραμμένο στο ΑΒΓΔ κύκλο
- Σχηματίζουν εικασία: αν το ΑΒΓΔ είναι περιγράψιμο σε κύκλο, τότε οι εσωτερικές του διχοτόμοι συντρέχουν σε σημείο Ρ, το οποίο ισαπέχει από τις πλευρές και τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών είναι ίσα

5η φάση: *έλεγχος εικασιών*

- Κατασκευάζουν κύκλο, τετράπλευρο περιγεγραμμένο σε αυτόν, εσωτερικές διχοτόμους
- Παρατηρούν ότι οι διχοτόμοι συντρέχουν
- Κάνουν έλεγχο μέσω συρσίματος (dragging test).

Επιβεβαιώσαμε σε μεγάλο βαθμό τα ευρήματα της έρευνας αυτής, δίνοντας την παραπάνω δραστηριότητα σε 4 μαθητές Α΄ Λυκείου, πολύ καλά εξοικειωμένους με τη χρήση του Sketchpad, χωρισμένους σε 2 ομάδες. Ωστόσο, αυτό που μας έκανε ιδιαίτερη εντύπωση, ήταν η ανακάλυψη σχέσεων πέρα των αναμενόμενων από εμάς. Συγκεκριμένα, μια ομάδα μαθητών ανακάλυψε το δικό τους «θεώρημα», κατά τη 2η φάση, όταν είχαν πλέον διαπιστώσει ότι τα Ε, Ζ, Θ, Η ταυτίζονται για πολλά είδη τετραπλεύρων. Προσπαθώντας να διατηρήσουν την ταύτιση των 4 αυτών σημείων, κράτησαν σταθερά τα Α, Β και Δ και μετακίνησαν το Γ (σύρσιμο κρυφού γεωμετρικού τόπου). Οι μαθητές παρατήρησαν ότι το Γ κινείται κατά μήκος μιας γραμμής. Τους ενθαρρύναμε να βάλλουν το Γ να αφήνει ίχνος κατά την κίνησή του (σχ.3). Εκεί αρχικά θεώρησαν ότι το Γ κινείται πάνω σε μια ευθεία, της οποίας προσπάθησαν να διαπιστώσουν την ιδιότητα. Στη συνέχεια όμως διαπίστωσαν ότι επρόκειτο περί καμπύλης, την οποία ωστόσο δεν μπόρεσαν να προσδιορίσουν με



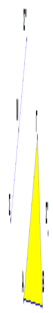
Σχήμα 3

μαθηματικό τρόπο, διότι δεν είχαν τις απαιτούμενες σε αυτή την τάξη γνώσεις. Τελικά, αφού ολοκλήρωσαν και τις επόμενες φάσεις της δραστηριότητας, επέστρεψαν στο εύρημά τους και έφτιαξαν τη δική τους μαθηματική πρόταση: «Αν το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγράψιμο σε κύκλο και Σ είναι ένα σημείο του επιπέδου τέτοιο ώστε το τετράπλευρο ΑΒΣΔ να είναι περιγράψιμο, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Σ» (η διατύπωση των μαθητών).

Συνοψίζοντας, η εμπλοκή των μαθητών με την επίλυση του παραπάνω προβλήματος, περιελάμβανε δράσεις πειραματισμού, δημιουργίας εικασιών, εξερεύνησης, ανακάλυψης κανονικοτήτων, εύρεσης κανόνα (συστηματοποίηση), ελέγχου εικασιών. Φυσικά, ιδιαίτερα έντονο ήταν το στοιχείο της διανοητικής πρόκλησης στη φάση της ανακάλυψης του δικού τους θεωρήματος. Παράλληλα, η δραστηριότητα αφήνει ανοιχτά αρκετά ακόμα ζητήματα που θα μπορούσαν να διερευνηθούν, όπως η εύρεση σχέσης ανάμεσα στις γωνίες του ΕΖΗΘ (απέναντι γωνίες παραπληρωματικές) και άρα το είδος του τετραπλεύρου (εγγράψιμο) ή ακόμα αν θα μπορούσε ο περιγεγραμμένος στο ΕΖΗΘ κύκλος να εφάπτεται των πλευρών του ΑΒΓΔ.

Δραστηριότητα 4η: Εύρεση αναλλοίωτων στοιχείων (θεώρημα Balacheff)

Η εύρεση αναλλοίωτων στοιχείων συναντάται σε πολλές ασκήσεις των σχολικών βιβλίων της γεωμετρίας. Ένα παράδειγμα παραδοσιακής διατύπωσης μιας τέτοιας άσκησης είναι το παρακάτω: «Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Σ. Κατασκευάζουμε διαδοχικά το Σ΄ συμμετρικό του Σ ως προς Α, το Σ΄΄ συμμετρικό του Σ΄ ως προς Β, το Σ΄΄΄ συμμετρικό του Σ΄΄ ως προς Γ και το μέσο Μ του ΣΣ΄΄΄. Δείξτε ότι το Μ είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Σ».



Σχήμ *Σχήμα 4α*

Σχήμα 4β

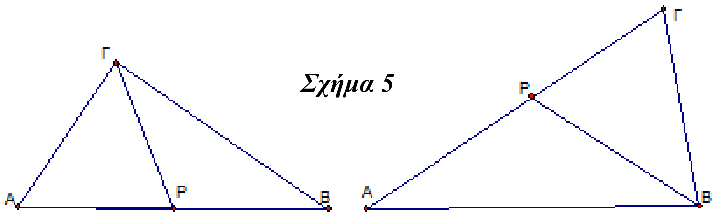
Σε ένα ΥΠΔΓ, η ίδια άσκηση μπορεί να αποκτήσει διερευνητική χροιά αν στους μαθητές δοθεί ένα έτοιμο αρχείο (σχήμα 4α),τους ζητηθεί σύροντας το σημείο Σ να παρατηρήσουν τη θέση του Μ για τις διαφορετικές θέσεις του Σ (ένα τέτοιο στιγμιότυπο βλέπουμε στο σχήμα 4β) και στη συνέχεια να δώσουν μια εξήγηση. Εδώ, οι μαθητές καλούνται να λύσουν ένα γρίφο: Πώς γίνεται σε ένα σχήμα που όλα μετακινούνται το Μ να παραμένει σταθερό;

Η διερεύνηση δόθηκε σε μαθητές της Β' Λυκείου, με χρήση διαδραστικού. Ήταν φανερά έκπληκτοι από το γεγονός ότι το Μ έμενε ακίνητο, τη στιγμή που τα υπόλοιπα σημεία Σ', Σ'' και Σ''' άλλαζαν θέση ανάλογα με την μεταβολή της θέσης του Σ. «Μήπως αυτό συμβαίνει γιατί είναι μέσο;» ήταν η πρώτη αντίδραση. Η διδάσκουσα σκόπιμα πρότεινε να δουν αν το μέσο του ΣΣ'' θα παρέμενε κι αυτό σταθερό κατά τις μεταβολές της θέσης του Σ. Όμως όχι, το νέο μέσο άλλαζε θέση. «Ας σχεδιάσουμε το μέσο του ΣΣ'» πρότεινε μια μαθήτρια. «Μα είναι το Α!» παρατήρησε μια άλλη. Εκείνη τη στιγμή, διευρύνθηκε η οπτική τους για τις σχέσεις των σημείων: Τα Σ, Σ' δεν ήταν απλώς συμμετρικά ως προς το Α, αλλά και το Α ήταν μέσο του ΣΣ'. Ομοίως παρατήρησαν πως το Β ήταν μέσο του Σ'Σ'' και το Γ μέσο του Σ''Σ'''. Ένας μαθητής πρότεινε να σχεδιαστεί το τετράπλευρο ΣΣ'Σ''Σ'''. Η επανάληψη του πειραματισμού με το τετράπλευρο σχεδιασμένο αποκάλυψε μια άλλη αλήθεια που εξέφρασε ένας μαθητής «Μα αφού και τα άλλα μέσα δεν κινούνται (εννοούσε τα Α, Β, Γ), γι' αυτό δεν κινείται και το Μ». Ήταν φανερό ότι άρχισαν να συσχετίζουν το Μ άμεσα με τα Α, Β, Γ, μάλιστα υπέθεσαν πως «θα κινηθεί το Μ αν κινήσουμε τα Α, Β, Γ», κάτι που επιβεβαιώθηκε σε νέο πειραματισμό. Έχοντας την απόλυτη βεβαιότητα πως το Μ και οι κορυφές του ΑΒΓ συσχετίζονται κάπως, προσπαθούσαν να εντοπίσουν το «πώς». Ένωσαν το Μ με το Β και χρειάστηκαν λίγες στιγμές παρατήρησης και αναστοχασμού για να αντιληφθούν ότι το ΜΑΒΓ ήταν παραλληλόγραμμο. Έπειτα μια μαθήτρια ανακάλεσε στη μνήμη της την πρόταση ότι «τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου», ενώ οι υπόλοιποι που δεν την θυμόντουσαν «σκάρωσαν» αμέσως την απόδειξη.

Η εύρεση αναλλοίωτων στοιχείων σε ένα δυναμικό σχήμα, αναμφίβολα μπορεί να προσδιορισθεί ευκολότερα απ΄ότι σε ένα στατικό, συνεπώς η συγκεκριμένη δραστηριότητα σε ένα ΥΠΔΓ έχει πρόσθετη παιδαγωγική αξία σε σχέση με τη μετάβαση του μαθητή από την εικασία προς την απόδειξη. Στην πραγματικότητα πρόκειται για αποδόμηση και επαναδόμηση της γνωστής πρότασης που αναφέρεται στα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου. Εδώ όμως – από διδακτικής άποψης - αναδεικνύεται η ιδιότητα των μέσων να είναι κέντρα συμμετρίας των άκρων των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων και αντιστρόφως. Επίσης, μπορεί να αξιοποιηθεί διδακτικά και το γεγονός ότι υπάρχει απειρία τετραπλεύρων που όταν συνδέσουμε τα μέσα των πλευρών τους προκύπτει το ίδιο ακριβώς παραλληλόγραμμο και άρα η μη αντιστρεψιμότητα της παραπάνω πρότασης.

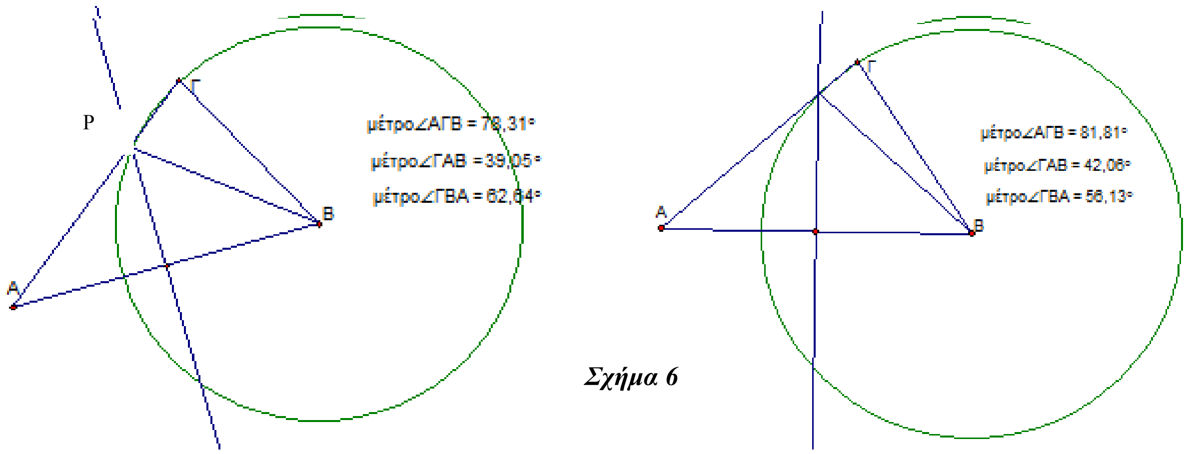
Δραστηριότητα 5η: Διαμόρφωση νέων ευρετικών λόγω του ΥΠΔΓ

Το γνωστό πρόβλημα των διαχωρίσιμων τριγώνων αποκτά μια νέα οπτική μέσα από την εργασία σε ΥΠΔΓ. Ο Hölzl (1996) έδωσε το πρόβλημα ως ακολούθως: «*Στο παρακάτω σχήμα, το κάθε τρίγωνο έχει χωρισθεί σε δυο ισοσκελή τρίγωνα. Μπορεί κάθε τρίγωνο να χωρισθεί με αυτό τον τρόπο ή τα τρίγωνα αυτά έχουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά;*».



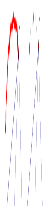
Σχήμα 5

Αναφέρεται στην περίπτωση ενός μαθητή 14 ετών, ο οποίος έκανε την ακόλουθη κατασκευή: Έφτιαξε τρίγωνο ΑΒΓ, έφερε την μεσοκάθετη του ΑΒ και κατασκεύασε τον κύκλο (Β, ΒΓ). Αν η μεσοκάθετη τέμνει την ΑΓ στο Ρ και ο κύκλος επίσης διέρχεται από το Ρ, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ διαιρείται σε δύο ισοσκελή. Ο Hölzl σημειώνει ότι αυτό μπορεί να μην λύνει το πρόβλημα, ωστόσο είναι μια πολύ αξιόλογη ευρετική, καθώς με το σύρσιμο των κορυφών του τριγώνου μπορεί να επιτύχει άπειρα στιγμιότυπα τριγώνων με την ιδιότητα αυτή (Σχήμα 6) και βάζοντας μετρητές να ανακαλύψει τις ιδιότητές τους.



Σχήμα 6

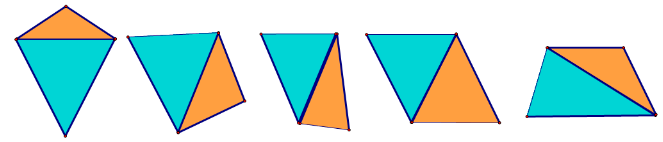
Οι Arzarello et al (2002) δίνουν το πρόβλημα ως ακολούθως: «Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ στην ΑΒ. Κατασκευάστε τα τρίγωνα ΑΡΓ και ΑΡΒ. Να κάνετε μια υπόθεση για τις ιδιότητες του ΑΒΓ που είναι απαραίτητες ώστε και τα δυο αυτά τρίγωνα να είναι ισοσκελή». Οι μαθητές μπορεί να καταλήξουν στα τρίγωνα του σχήματος 5 και ειδικά για την περίπτωση του πρώτου σχήματος αναφέρουν την ακόλουθη δράση των μαθητών: Ονομάζουν Ρ το μέσο του ΑΒ. Αρχικά κάνουν περιπλανητικό σύρσιμο, βρίσκουν κάποια τρίγωνα που επαληθεύουν τη σχέση και στη συνέχεια για να έχουν πιο πολλά στοιχεία στα χέρια τους μετακινούν το Γ αφήνοντας ίχνος έτσι ώστε πάντα ΡΓ=ΡΑ (σύρσιμο κρυφού γεωμετρικού τόπου). Πλέον, μπορούν να παρατηρήσουν ότι το ίχνος δημιουργεί κύκλο (σχήμα 7α) και να σχηματίσουν την εικασία «διαχωρίσιμα τρίγωνα ΑΒΓ μπορούν να σχηματισθούν αν η κορυφή τους Γ ανήκει σε κύκλο (Ρ, ΡΑ)», οπότε κινούμενοι πλέον εντός της μαθηματικής θεωρίας να διαπιστώσουν ότι το τρίγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο διαμέτρου ΑΒ, συνεπώς η γωνία ΑΓΒ είναι ορθή. Μπορούν να επικυρώσουν



Σχήμα 7

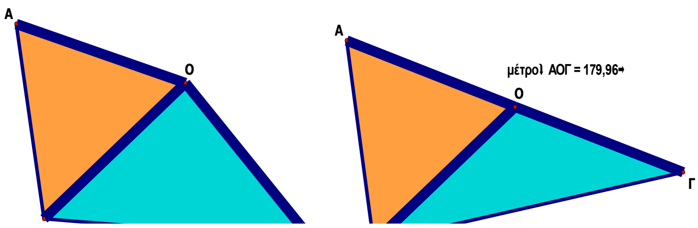
την εικασία τους, αποτυπώνοντας αρκετά σημεία στα οποία ΡΓ=ΡΑ (σχήμα 7β) και στη συνέχεια αφού κατασκευάσουν τον κύκλο (Ρ, ΡΑ) να διαπιστώσουν ότι τα σημεία με την ιδιότητα αυτή 8ανήκουν στον κύκλο (συνδεδεμένο σύρσιμο). Ακολουθεί η γεωμετρική κατασκευή και ο έλεγχος με το σύρσιμο.

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός πως στην ειδική αυτή περίπτωση το διαχωρίσιμο τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Μια απλή διερεύνηση αποκαλύπτει και το αντίστροφο, ότι όλα τα ορθογώνια διαιρούνται σε δύο ισοσκελή τρίγωνα από την διάμεσο της υποτείνουσάς τους. Είναι η άλλη όψη της γνωστής πρότασης «η διάμεσος ενός ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του ισούται με το μισό της υποτείνουσας». Στο σενάριο «Δύο ισοσκελή και ένα ορθογώνιο» (Περυσινάκη, 2008), υπάρχει η εξής ιδέα τύπου puzzle. Να πειραματιστούν οι μαθητές με δύο δοσμένα μεταβαλλόμενα ισοσκελή τρίγωνα που τα σκέλη του ενός είναι ίσα με τα σκέλη του άλλου και να εξετάσουν εάν αυτά θα μπορούσαν να συνενωθούν με κάποιο τρόπο ώστε να παραγάγουν παραλλ/μμα, τραπέζια, ρόμβους, τετράγωνα, κ.α. (σχήμα 8).



Σχήμα 8

Μια δραστηριότητα εμφανίζει τα δύο ισοσκελή να έχουν κοινή κορυφή και κοινό σκέλος (σχήμα 9). Ζητείται από τους μαθητές, σέρνοντας τις κορυφές του αρχικού τετραπλεύρου, να το μετασχηματίσουν σε τρίγωνο. Μια μέτρηση γωνιών του παραγόμενου τριγώνου αποκαλύπτει πως αυτό είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση που τα δύο ισοσκελή είχαν πάλι κοινό σκέλος αλλά διαφορετικές κορυφές, είναι δυνατόν να παραχθεί άπειρο πλήθος σκαληνά τρίγωνα και τα δύο χρυσά ισοσκελή (που η γωνία κορυφής τους είναι είτε 36° είτε 108°), τα οποία, μαζί με το ισοσκελές ορθογώνιο είναι τα μοναδικά ισοσκελή που είναι διαχωρίσιμα.



Σχήμα 9

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία, επιχειρήσαμε ένα πέρασμα από διάφορα είδη ανοιχτών δραστηριοτήτων σε ΥΠΔΓ, χωρίς φυσικά να έχουμε εξαντλήσει το σύνολο των περιπτώσεων. Οι δραστηριότητες στις οποίες αναφερθήκαμε, έχουν τα εξής χαρακτηριστικά: Η εργασία των μαθητών στο ΥΠΔΓ αναδεικνύει σταδιακά διάφορα συνθετικά της απόδειξης, με τη βοήθεια των εργαλείων του λογισμικού. Σε κάποιες από τις δραστηριότητες, τα διαφορετικά είδη συρσίματος πιστοποιούν τη μετάβαση του μαθητή από την εικασία προς την τυπική απόδειξη. Ταυτόχρονα, η ανοιχτή διατύπωση των ερωτημάτων θέτει ένα είδος αινίγματος, με μη προφανή άμεση απάντηση, για τη λύση του οποίου απαιτείται διερεύνηση. Η παρουσίαση του προβλήματος στο λογισμικό, αποκαλύπτει κάτι "μυστηριώδες", συμπληρώνει τον τρόπο διατύπωσης και συχνά, αυτό το στοιχείο είναι τόσο ισχυρό που από μόνο του αποτελεί διατύπωση προβλήματος. Ο πειραματισμός "φωτίζει" σχέσεις μεγεθών στο εμπλεκόμενο πρόβλημα και ίσως οδηγεί σε λύση, ενώ στην περίπτωση της κατασκευής υπάρχει επινόηση πειραματισμού από τους ίδιους τους μαθητές. Στις δραστηριότητες αυτές, δεν υπάρχουν «κουμπιά» που μαρτυρούν τη λύση. Η τυπική απόδειξη σε χαρτί-μολύβι έρχεται ως φυσική συνέχεια της εργασίας στο ΥΠΔΓ και της συνομιλίας εντός των ομάδων, καθώς και με τον εκπαιδευτικό. Η επίλυση σαν αντίστροφη διαδικασία διερεύνησης ερμηνεύει και συστηματοποιεί τις παρατηρήσεις που έχουν προηγηθεί, σε λογικά επαγωγικά συμπεράσματα. Σε κάποιες περιπτώσεις, η εργασία στο ΥΠΔΓ συνεχίζεται και κατά τη διάρκεια της τυπικής απόδειξης, όταν οι μαθητές έχουν ξεπεράσει το σχηματισμό εικασίας και κινούνται πλέον εντός της μαθηματικής θεωρίας. Παράλληλα, οι δραστηριότητες είναι επεκτάσιμες και δίνουν τη δυνατότητα στον εκπαιδευτικό να συνδέσει τη νέα γνώση με παλαιότερες, εντός της ίδιας γνωστικής περιοχής των μαθηματικών ή με διαφορετικές περιοχές (πχ Γεωμετρία με Άλγεβρα). Έτσι, οι έννοιες αποκτούν πολλαπλές οπτικές και η γνώση ενιαιοποιείται, σε αντίθεση με τα παραδοσιακά Προγράμματα Σπουδών, όπου παρουσιάζεται κατακερματισμένα. Με αυτή την έννοια, θεωρούμε ιδιαίτερα σημαντική την ανάπτυξη διαλόγου στην κοινότητα των εκπαιδευτικών, για την αξιολόγηση υπαρχουσών δραστηριοτήτων και την επινόηση νέων, που να έχουν τα χαρακτηριστικά που περιγράψαμε παραπάνω. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί ως συνέχεια της επιμόρφωσης Β΄ επιπέδου των εκπαιδευτικών, με τη μορφή ημερίδων ή ομάδων εργασίας εκπαιδευτικών όμορων σχολικών μονάδων.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Almeida, D. (2001). Pupils' proof potential. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, v.32, n.1, pp.53-60.

Arsac, G., Germain, G., Mante, M. (1988). Problème ouvert et situation – problem. IREM, Villeurbanne

Arzarello, F., Olivero, Paola, D., Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments, ZDM, v.34 (3), pp.66-72.

De Villiers, M. (2004). Using Dynamic Geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Taylor & Francis Ltd, v.35, n.5., pp.703-724.

De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. Excerpt from Introduction to de Villiers, M. (1999). Rethinking Proof with Sketchpad, Key Curriculum Press.

Furinghetti, F., Olivero, F., Paola, D. (2001). Students approaching proof through conjectures: snapshots in a classroom, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Taylor & Francis Ltd, v.32, n.3, pp.319-335.

Furinghetti, F., Paola, D. (2003). To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: a case study. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty and J.T. Zilliox (Eds), Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA, USA, v.2, pp.397-404.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. Educational Studies in Mathematics, v.44, pp.5-23, Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Harper, S., Edwards, M. (2011). A New Recipe: No More Cookbook Lessons, Mathematics Teacher (NCTM), October 2011, v.105, i.3, pp.180-188

Hölzl, R. (1996). How does "dragging" affect the learning of Geometry, International Journal of Computers for Mathematical Learning, v.1, pp.169-187, Netherlands: Kluwer

Καλογερία, Ε. (2007). Αξιοποίηση Ψηφιακών Εργαλείων Δυναμικής Γεωμετρίας στην Αποδεικτική Διαδικασία: Μελέτη Περίπτωσης ενός Εκπαιδευτικού. Στο Ν. Δαπόντες, Ν. Τζιμόπουλος, (Επιμ.), Πρακτικά εισηγήσεων, τόμος Β΄, σελ. 83-93.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri – Geometry, International Journal of Computers for Mathematical Learning, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, v.6, pp.283-317

Laborde, C., Laborde, J.M. (1995). What About a Learning Environment Where Euclidean Concepts are Manipulated with a Mouse. In A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss, L. Edwards. (Eds), Computers and Exploratory Learning, Springer, NATO ASI Series, v.146, pp.241-264.

Mariotti, M.A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment, Educational Studies in Mathematics, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, v.44, pp.25-53.

Martin, T., Soucy McCrone, S., Wallace, M., Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof, Educational Studies in Mathematics, Springer, v.60, pp.95-124.

Moore, R. (1994). Making the transition to formal proof. Educational Studies in Mathematics, Kluwer Academic Publishers, v.27, pp.249-266

Olivero, F. (1999). Cabri-Géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations: An exploratory study. Proceedings of ICTMT 4, Plymouth.

Περυσινάκη, Ε. (2008). Δύο ισοσκελή και ένα ορθογώνιο. Βιβλιοθήκη Ιφιγένεια http://tinyurl.com/bdo3skg

Ritemaths - Annulus Area Problem http://tinyurl.com/afxjvau