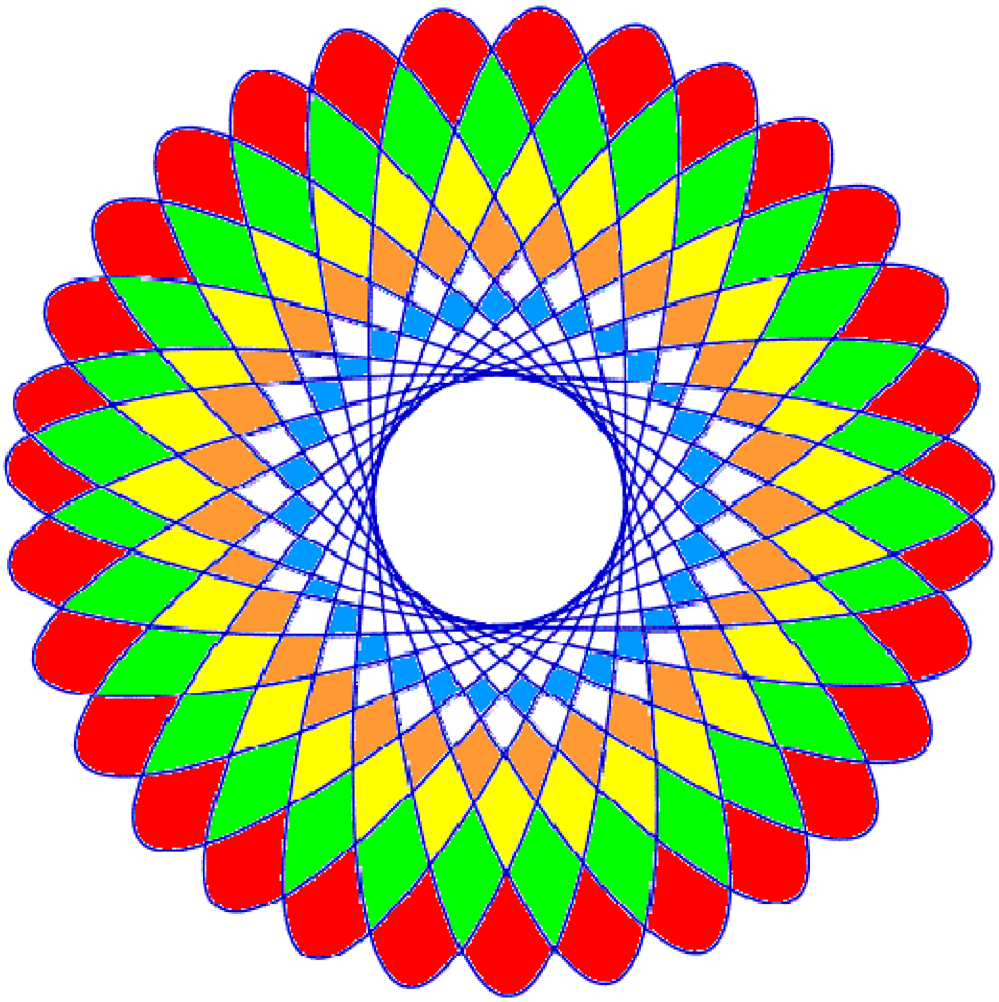
Φεργαδιώτης Αθανάσιος

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 2^{o} (179)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3$^{\text{Ο}}$ - ΤΡΙΓΩΝΑ

1$^{\text{Ο}}$ – 2$^{\text{Ο}}$ – 3$^{\text{Ο}}$ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ (30)

1.GI_A_GEO_2_2824

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν ΕΗ ⊥ ΒΓ και ΔΖ ⊥ ΒΓ , να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) ΕΗ = ΔΖ. (Μονάδες 12)

2.GI_A_GEO_2_2846

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) ΑΔ = ΑΕ (Μονάδες 10)

3.GI_A_GEO_2_2847

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ.
Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΚ = ΜΛ. (Μονάδες 13)

β) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ. (Μονάδες 12)

4.GI_A_GEO_2_2848

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι

α) ΜΔ = ΜΕ (Μονάδες 12)

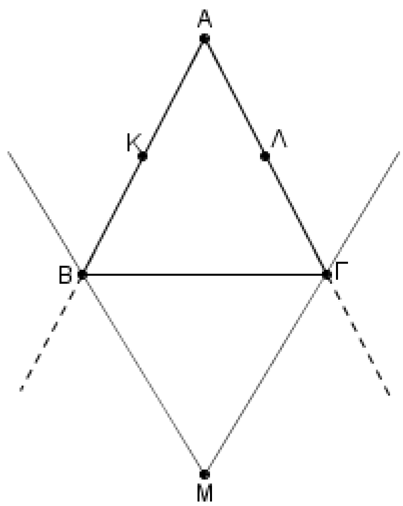
β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές (Μονάδες 13)

5.GI_A_GEO_2_2854

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ =ΑΓ). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Μ και Κ , Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές με ΜΒ = ΜΓ. (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι ΜΚ = ΜΛ. (Μονάδες 13)



6.GI_A_GEO_2_3417

Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Α΄Β΄Γ΄ (Α΄Β΄=Α΄Γ΄) .

α) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει ΑΒ = Α΄Β΄ και $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.
(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι: αν ισχύει ΑΓ = Α΄Γ΄ και $\hat{B} = \hat{B}'$, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.
(Μονάδες 12)

7.GI_A_GEO_2_3420

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι :

α) Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.
(Μονάδες 12)

β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΓ = ΑΒ.
(Μονάδες 13)

8.GI_A_GEO_2_3421

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ. (Μονάδες 13)

9.GI_A_GEO_2_3423

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Από το Δ φέρουμε ΔΕ⊥ΒΓ, και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Β).
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = ΒΕ (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

10.GI_A_GEO_2_3426

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και η διχοτόμος της γωνίας του $\hat{\Gamma}$, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ ⊥ΒΓ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα.
(Μονάδες 13)

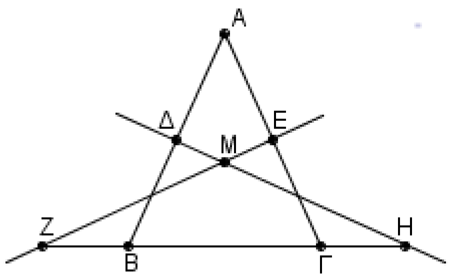
β) Η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ.
(Μονάδες 12)

11.GI_A_GEO_2_4974

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Οι μεσοκάθετες ευθείες των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Ζ και Η.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ.
(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές.
(Μονάδες 10)



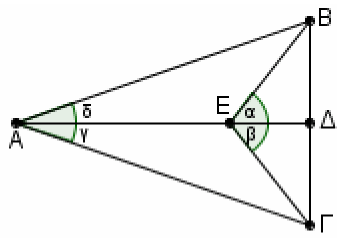
12.GI_A_GEO_2_5035

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}=\hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 9)



13.GI_A_GEO_2_5048

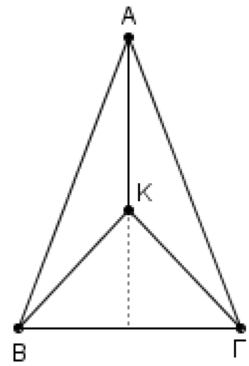
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε ΚΒ = ΚΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$. (Μονάδες 6)

γ) Η προέκταση της ΑΚ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{K}\Gamma$ του τριγώνου ΒΚΓ. (Μονάδες 7)



14.GI_A_GEO_2_5053

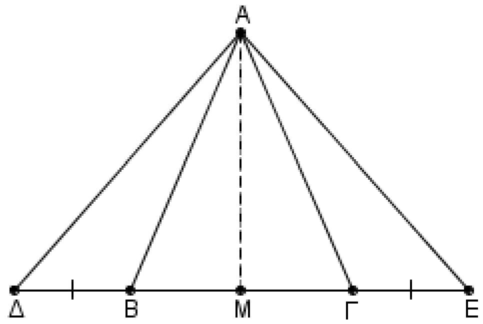
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) . Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΔ = ΓΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B}_{\varepsilon\xi}=\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

γ) Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 7)



15.GI_A_GEO_2_5069

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Η προέκταση της διαμέσου ΑΜ προς το μέρος της κορυφής Α διχοτομεί την πλευρά ΕΔ του τριγώνου ΔΑΕ. (Μονάδες 13)

16.GI_A_GEO_2_5075

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε ΜΒ = ΜΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΑΜΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Η ευθεία ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{M}\Gamma$ (Μονάδες 13)

17.GI_A_GEO_2_5136

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και στις ίσες πλευρές ΑΒ , ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

18.GI_A_GEO_2_5139

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ (ΚΑ = ΚΒ) και ΚΓ διχοτόμος της γωνίας $\hat{Κ}$. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε σημείο Μ, έτσι ώστε ΑΛ = ΒΜ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές (Μονάδες 12)

β) η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ (Μονάδες 13)

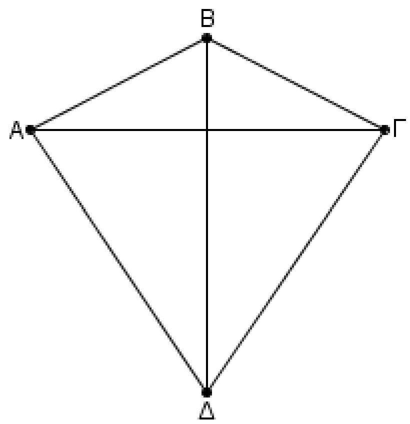
19.GI_A_GEO_2_5144

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ = ΒΓ και ΔΑ = ΔΓ. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 13)



20.GI_A_GEO_2_5127

Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΟΑ = ΟΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΜΑ = ΜΒ. (Μονάδες 15)

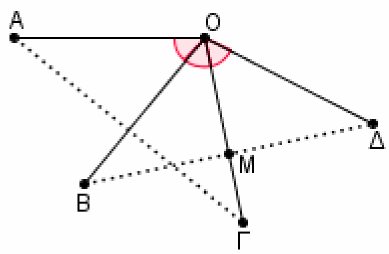
β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $Α\hat{Μ}Β$. (Μονάδες 10)

21.GI_A_GEO_2_5560

Αν $Α\hat{Ο}Β = Β\hat{Ο}Γ = Γ\hat{Ο}Δ$ και ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ, να αποδείξετε ότι:

α) ΑΓ = ΒΔ . (Μονάδες 10)

β) το Μ είναι μέσον της ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ. (Μονάδες 15)

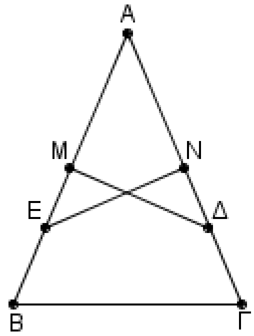


22.GI_A_GEO_2_5582

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΔ = ΑΕ.
Να αποδείξετε ότι:
α) ΒΕ = ΓΔ (Μονάδες 6)
β) ΒΔ = ΓΕ (Μονάδες 10)
γ) $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$ (Μονάδες 9)

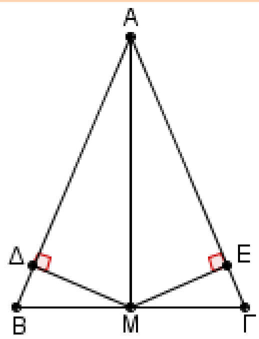
23.GI_A_GEO_2_5591

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Αν ΜΔ = ΝΕ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)
β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΝΕ (Μονάδες 13)



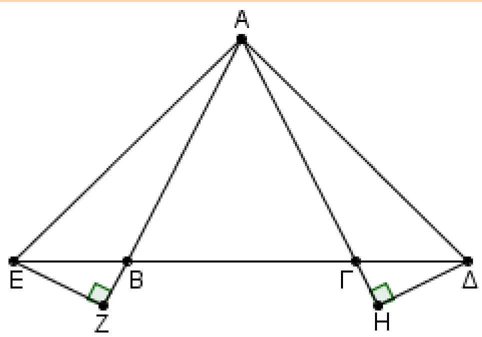
24.GI_A_GEO_2_5592

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Αν ΜΔ = ΜΕ, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)
β) Αν ΑΒ = ΑΓ και Μ μέσο του ΒΓ, τότε ΜΔ = ΜΕ. (Μονάδες 12)



25.GI_A_GEO_2_5595

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΓΔ = ΒΕ. Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ.
Να αποδείξετε ότι:
α) ΑΔ = ΑΕ (Μονάδες 12)
β) ΕΖ = ΔΗ (Μονάδες 13)



26.GI_A_GEO_2_5597

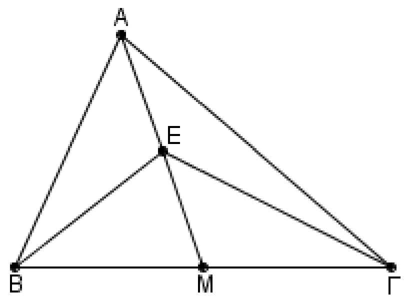
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ. Αν ΒΓ = 2 ΒΕ να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{E}B = E\hat{M}\Gamma$

(Μονάδες 12)

β) ΑΒ = ΕΓ .

(Μονάδες 13)



27.GI_A_GEO_2_5607

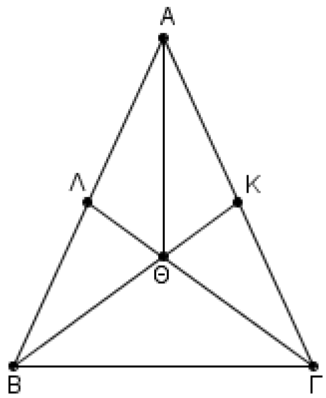
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τις διαμέσους του ΒΚ και ΓΛ, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο Θ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι διάμεσοι ΒΚ και ΓΛ είναι ίσες.

(Μονάδες 12)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΓΘ είναι ίσα

(Μονάδες 13)



28.GI_A_GEO_2_5628

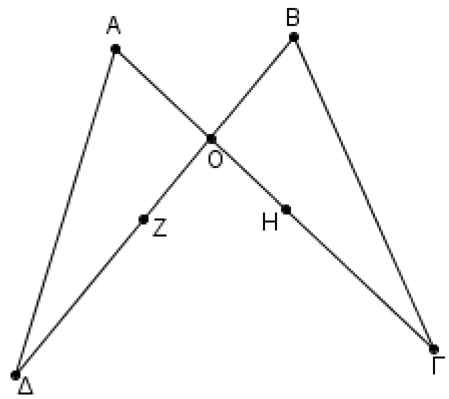
Δίνονται τα τμήματα ΑΓ = ΒΔ που τέμνονται στο σημείο Ο έτσι ώστε ΟΑ = ΟΒ, και τα σημεία Η και Ζ στα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΟΗ = ΟΖ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες $A\hat{\Delta}O$ και $B\hat{\Gamma}O$ είναι ίσες.

(Μονάδες 12)

β) ΑΖ = ΒΗ .

(Μονάδες 13)



29.GI_A_GEO_2_6592

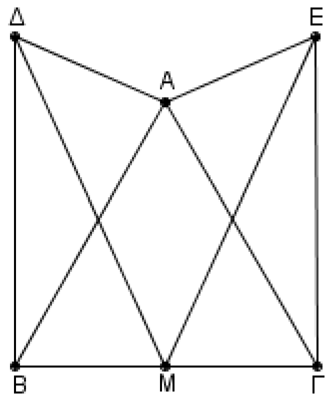
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ, τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια ώστε ΒΔ = ΓΕ. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

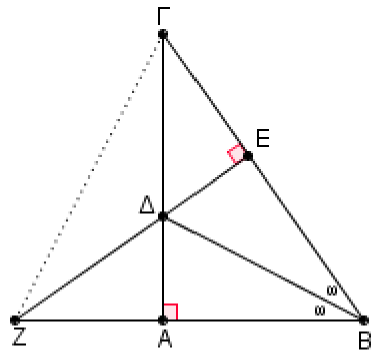
β) ΑΔ = ΑΕ.

(Μονάδες 13)



30.GI_A_GEO_2_7453

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90^0) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ$\perp$ΒΓ που τέμνει την προέκταση της ΑΒ (προς το Α) στο Ζ.



Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ = ΑΒ,

(Μονάδες 12)

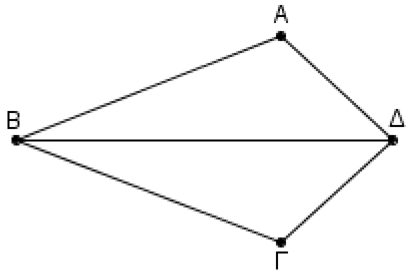
β) το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

ΚΥΚΛΟΣ – ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ – ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ (3)

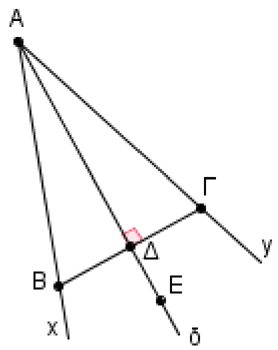
1.GI_A_GEO_2_5029

Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΒΑ = ΒΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.
Να αποδείξτε ότι:
α) $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$ (Μονάδες 8)
β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 7)



2.GI_A_GEO_2_5619

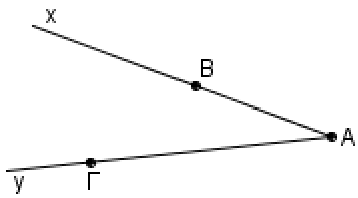
Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Αδ. Από τυχαίο σημείο Β της Αx φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αy στο Γ.
Να αποδείξετε ότι :
α) Τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ. (Μονάδες 13)



3.GI_A_GEO_2_5733

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αx και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.
Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:
α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. (Μονάδες 9)
β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 9)
γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 7)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.



ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΛΕΥΡΩΝ ΚΑΙ ΓΩΝΙΩΝ (3)

1.GI_A_GEO_2_2837

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α = 90^\circ$), η διχοτόμος τη γωνίας $\hat{Γ}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε . Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΔ = ΔΕ$ (Μονάδες 13)

β) $ΑΔ < ΔΒ$ (Μονάδες 12)

2.GI_A_GEO_2_3425

Στο ακόλουθο σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ , ώστε $ΔΕ = ΑΔ$.

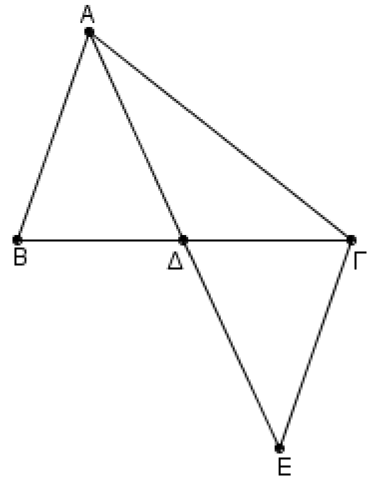
Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΒ = ΓΕ$

(Μονάδες 12)

β) $ΑΔ < \dfrac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$

(Μονάδες 13)



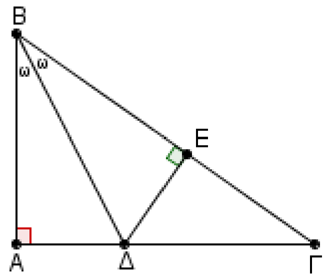
3.GI_A_GEO_2_5580

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΔ = ΔΕ$ (Μονάδες 8)

β) $ΑΔ < ΔΓ$ (Μονάδες 9)

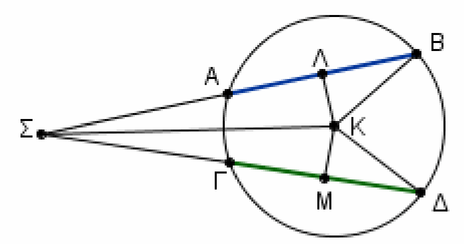
γ) $ΑΓ > ΑΒ$ (Μονάδες 8)



ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΤΜΗΜΑΤΑ – ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ (4)

1.GI_A_GEO_2_2816

Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (Κ, ρ) θεωρούμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ του κύκλου για τις οποίες ισχύει ΣΒ = ΣΔ. Τα ΚΛ και ΚΜ είναι τα αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΓΔ του κύκλου αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:

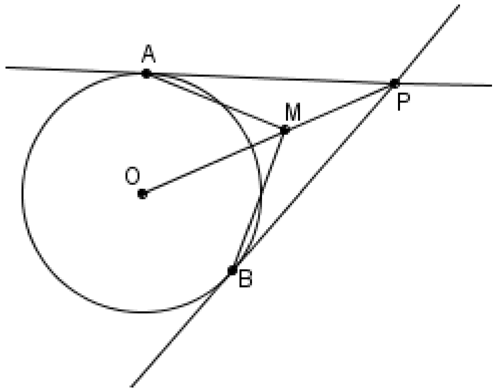
i. τα τρίγωνα ΚΒΣ και ΚΔΣ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

ii. ΚΛ = ΚΜ. (Μονάδες 10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες. (Μονάδες 5)

2.GI_A_GEO_2_5127

Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (Ο,ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:

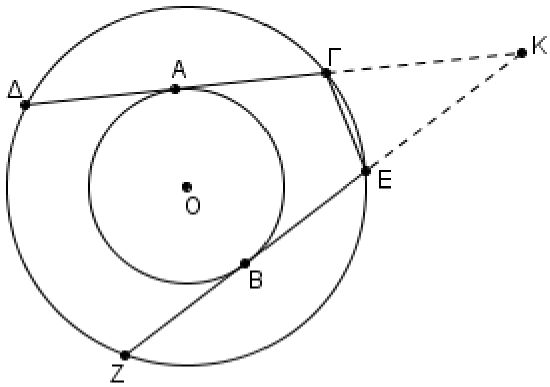


α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) οι γωνίες $M\hat{A}O$ και $M\hat{B}O$ είναι ίσες. (Μονάδες 13)

3.GI_A_GEO_2_5613

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R (ρ < R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (Ο,R) εφάπτονται του κύκλου (Ο, ρ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

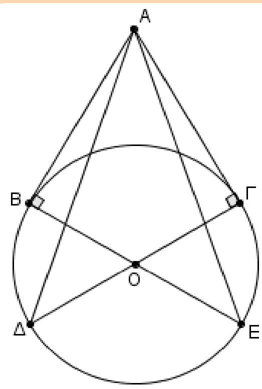


α) Να αποδείξετε ότι ΔΓ = ΖΕ. (12 Μονάδες)

β) Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές. (13 Μονάδες)

155.GI_A_GEO_2_5647

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Από σημείο Α εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα.



Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο} - ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ – ΕΥΚΛΕΙΔΙΟ ΑΙΤΗΜΑ (4)

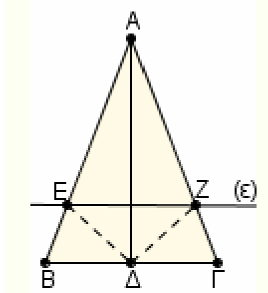
1.GI_A_GEO_2_2845

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ και μια ευθεία (ε) παράλληλη προς την ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



2.GI_A_GEO_2_5061

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ =ΑΓ) και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε ημιευθεία

Γx ⊥ ΒΓ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα ΓΔ = ΑΒ.

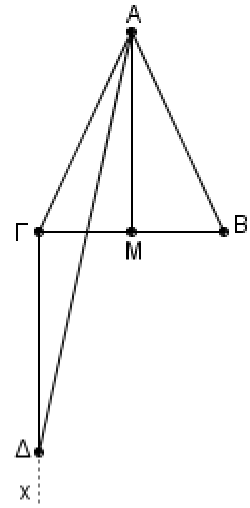
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\Gamma\hat{\Delta}A$.

(Μονάδες 12)

β) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$.

(Μονάδες 13)



3.GI_A_GEO_2_5066

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) ΕΔ//ΒΓ (Μονάδες 13)

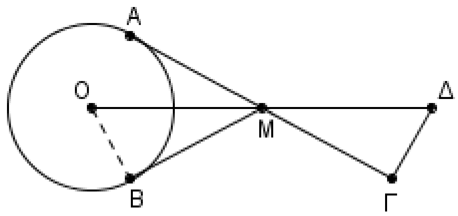
4.GI_A_GEO_2_5134

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΓ=ΜΑ και την ΟΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΟΜ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα, και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους.

(Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ΟΑ//ΓΔ. (Μονάδες 12)



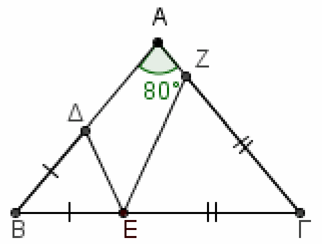
ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (28)

1.GI_A_GEO_2_2814

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ είναι $\hat{A} = 80^0$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ και κατόπιν τα σημεία Δ και Ζ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΔ = ΒΕ και ΓΕ = ΓΖ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΒΔΕ και ΓΖΕ. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{E}Z$. (Μονάδες 10)



2.GI_A_GEO_2_2839

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90^0$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΕ = ΑΒ. (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον $B\hat{\Delta}A = 55^0$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 13)

3.GI_A_GEO_2_2853

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία ΧΟΨ. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές ΟΧ και ΟΨ της γωνίας στα σημεία Α , Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία Γ, Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

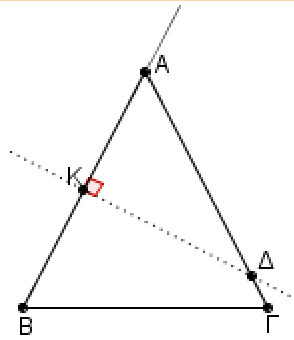
(Μονάδες 25)

4.GI_A_GEO_2_2855

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η εξωτερική γωνία Α είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας Β.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ. (Μονάδες 10)

β) Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο εσωτερικό της σημείο Δ. Αν η γωνία ΑΔΒ είναι ίση με 80^o, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 15)

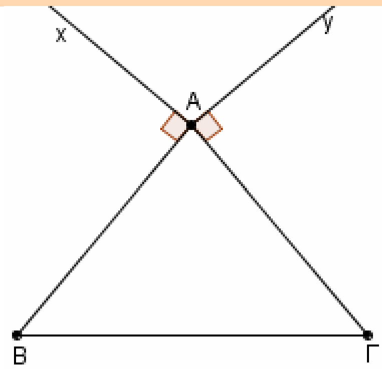


5.GI_A_GEO_2_2857

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε $Ax \perp AB$ και $Ay \perp A\Gamma$. Οι κάθετες στην πλευρά ΒΓ στα σημεία Β και Γ τέμνουν τις Αx και Αy στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ. (Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία ΒΑΓ είναι ίση με 80^o, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΑΕ. (Μονάδες 13)



6.GI_A_GEO_2_2860

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Οι γωνίες $A\hat{I}\Gamma$ και $A\hat{I}B$ είναι ίσες. (Μονάδες 10)

γ) Η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 7)

7.GI_A_GEO_2_3424

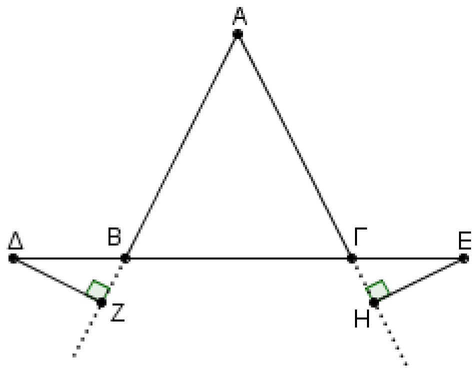
Θωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημεία Δ και Ε στην ευθεία ΒΓ τέτοια, ώστε ΒΔ = ΓΕ. Έστω ότι $\Delta Z \perp AB$ και $EH \perp A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ΒΖ = ΓΗ. (Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

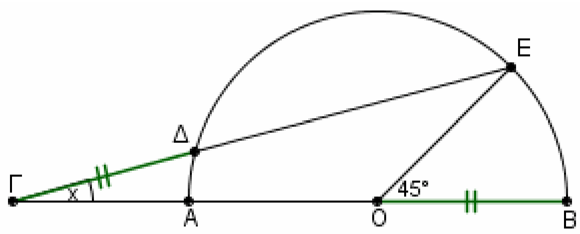
β) Αν $\hat{A} = 50^0$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΖΗ. (Μονάδες 8)



8.GI_A_GEO_2_4972

Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ προεκτείνουμε την ΑΒ προς το μέρος του Α και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε Ε ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ ισούται με το ΟΒ και η γωνία $B\hat{O}E = 45^0$, να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{\Gamma}O = x$

(Μονάδες 25)

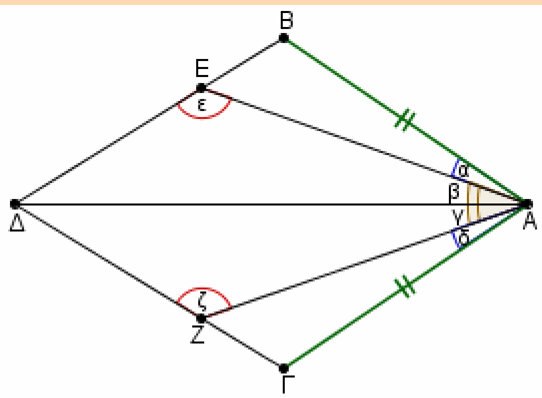


9.GI_A_GEO_2_5017

Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και ΑΒ = ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

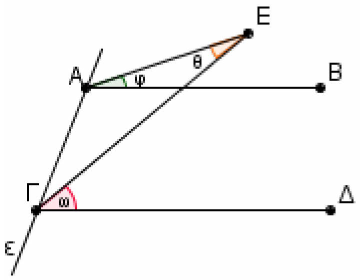
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

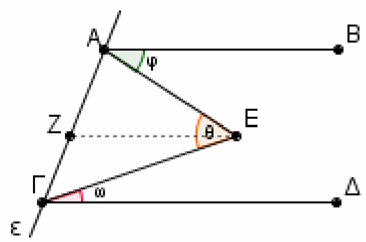
β) Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



10.GI_A_GEO_2_5040

Δίνεται ευθεία ε του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα ΑΒ και ΓΔ καθώς και ένα τυχαίο σημείο Ε βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της ε.
Να αποδείξετε ότι:
α) Αν το Ε είναι εκτός των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ τότε: $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$ (Μονάδες 10)

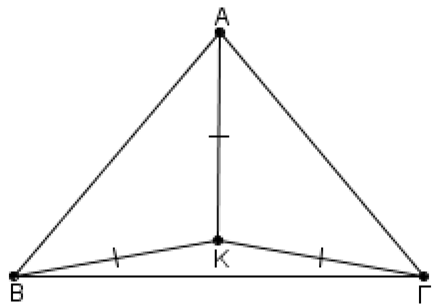




β) Αν το Ε είναι ανάμεσα στα τμήματα ΑΒ και ΓΔ και ΕΖ//ΑΒ, τότε να αποδείξετε ότι $\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$ (Μονάδες 15)

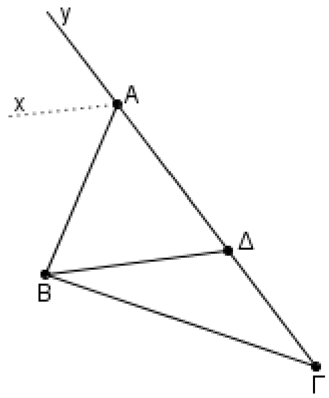
11.GI_A_GEO_2_5055

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 80^0$.
Έστω Κ σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$,τέτοιο ώστε ΚΒ = ΚΑ = ΚΓ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΚΑ και ΓΚΑ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{B}K$ και $A\hat{\Gamma}K$. (Μονάδες 8)
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{K}\Gamma$. (Μονάδες 7)



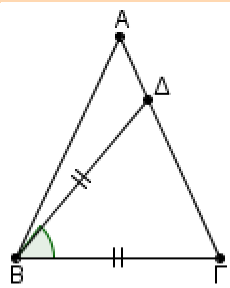
12.GI_A_GEO_2_5064

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ . Έστω Αχ η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = 120^0$. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην Αχ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Δ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)
ii. ΔΓ = ΑΓ – ΑΒ (Μονάδες 5)
β) Αν η γωνία $B\hat{\Delta}A$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΔΓ. (Μονάδες 10)



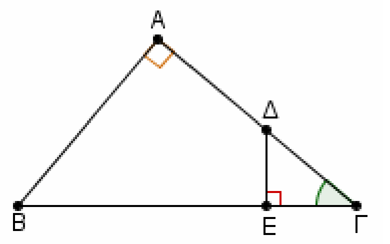
13.GI_A_GEO_2_5080

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με γωνία $\hat{A} = 50^0$. Έστω Δ είναι σημείο της πλευράς ΑΓ, τέτοιο ώστε ΒΔ = ΒΓ.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $\hat{A}$. (Μονάδες 13)



14.GI_A_GEO_2_5089

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$) με $\hat{\Gamma}=40^0$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ και ΔΕ⊥ΒΓ.
Να υπολογίσετε:
α) τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΓ. (Μονάδες 10)
β) τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΔΕΒ. (Μονάδες 15)

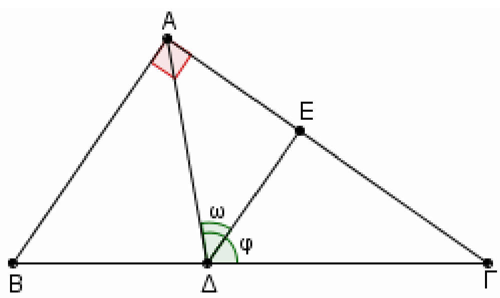


15.GI_A_GEO_2_5092

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με γωνία κορυφής $\hat{A}=40^0$. Στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) παίρνουμε τμήμα ΒΔ τέτοιο ώστε ΒΔ = ΑΒ.
Να υπολογίσετε
α) τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)
β) τη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$. (Μονάδες 15)

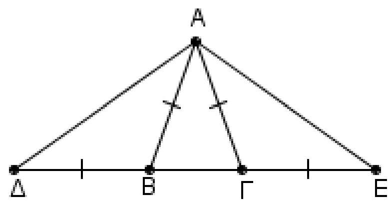
16.GI_A_GEO_2_5094

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$). Έστω ότι η ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας Α και η ΔΕ//ΑΒ.
Αν η γωνία $\hat{B}=20^0+\hat{\Gamma}$,
α) να υπολογίσετε:
Ι. τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)
ΙΙ. τις γωνίες $\hat{\varphi}$ και $\hat{\omega}$. (Μονάδες 10)
β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)



17.GI_A_GEO_2_5100

Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν ΔΒ = ΒΑ = ΑΓ = ΓΕ και $B\hat{A}\Gamma=40^0$.
Να αποδείξετε ότι
α) $A\hat{B}\Delta=A\hat{\Gamma}E=110^0$. (Μονάδες 10)
β) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
γ) το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)



18.GI_A_GEO_2_5142

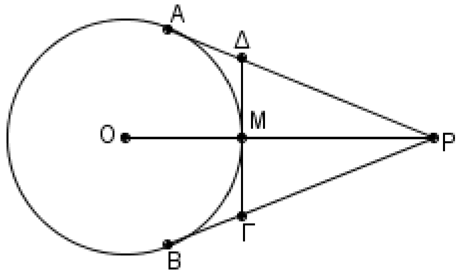
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=80^0$ και $\hat{B}=20^0+\hat{\Gamma}$, και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 12)
β) Φέρουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{\Delta}E$, $E\hat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 13)

19.GI_A_GEO_2_5567

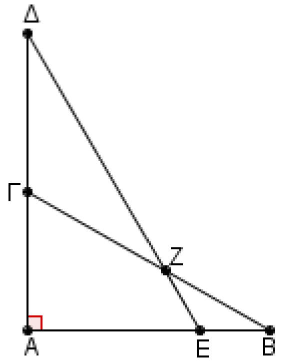
Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, και από ένα σημείο Ρ εκτός αυτού φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Το τμήμα ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ και η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΡΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία ΑΡΒ είναι 40^0 να υπολογίσετε τη γωνία ΑΟΒ. (Μονάδες 12)



20.GI_A_GEO_2_5570



Στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ (γωνία Α ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει $\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^0$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΕΖΓ. (Μονάδες 13)

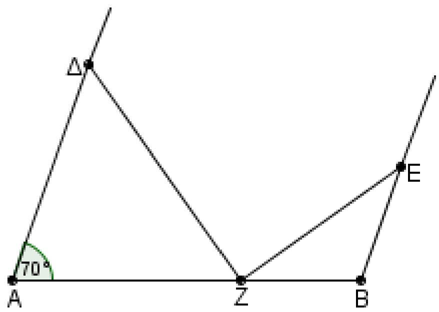
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΖΔ και ΕΒΖ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)

21.GI_A_GEO_2_5572

Στο παρακάτω σχήμα, οι ΑΔ και ΒΕ είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = AZ$, $BE = BZ$ και $\hat{A} = 70^0$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΑΔΖ και ΒΖΕ. (Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{Z}E = 90^0$. (Μονάδες 9)



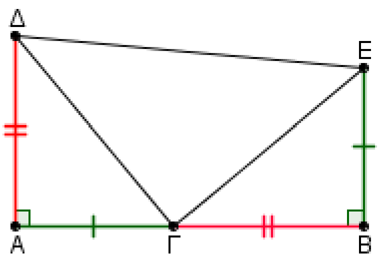
22.GI_A_GEO_2_5573

Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες $\hat{A}, \hat{B}$ είναι ορθές και επιπλέον $A\Delta = B\Gamma$ και $A\Gamma = BE$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία $E\hat{\Gamma}B = 40^0$ τότε το τρίγωνο ΔΓΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 12)

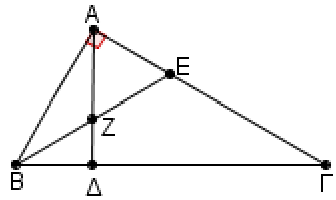


23.GI_A_GEO_2_5578

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν $\hat{A}+\hat{\Gamma}=2\hat{B}$ και $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία Β είναι 60^0. (Μονάδες 10)

β) Αν το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΕ τέμνονται στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 15)



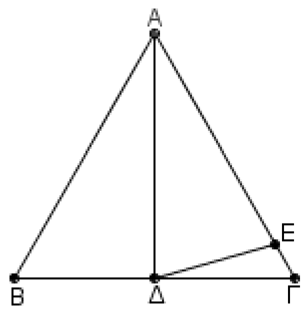
24.GI_A_GEO_2_5599

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και η διάμεσός του ΑΔ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Delta=30^0$. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΔ=ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΔΓ. (Μονάδες 8)

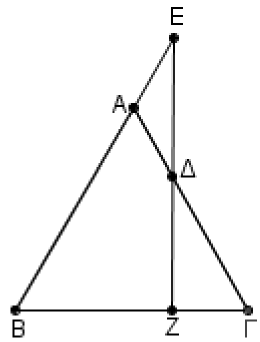


25.GI_A_GEO_2_6002

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε σημείο Ε στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) και σημείο Δ στο εσωτερικό της πλευράς ΑΓ, ώστε ΑΕ = ΑΔ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 10)

β) Αν Ζ είναι το σημείο τομής της προέκτασης της ΕΔ (προς το Δ) με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΕΖ είναι κάθετη στην ΒΓ. (Μονάδες 15)



26.GI_A_GEO_2_6584

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$) και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α. Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία ΑΔΕ. (Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20 μοίρες μεγαλύτερη της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$. (Μονάδες 7)

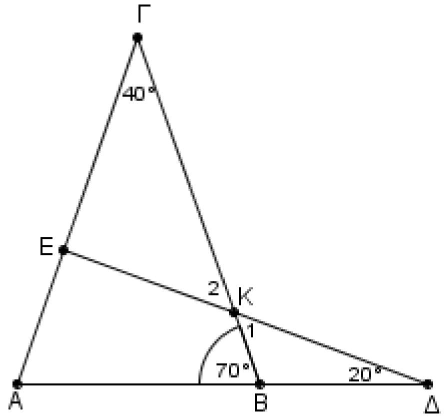
27.GI_A_GEO_2_6593

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ).

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Αν $\hat{A}=75^0+\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

28.GI_A_GEO_2_6595



Στο παρακάτω σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 12)

β) η γωνία ΑΕΔ είναι ορθή.

(Μονάδες 13)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο - ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ - ΤΡΑΠΕΖΙΑ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ (19)

1.GI_A_GEO_2_2822

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ = ΑΔ και φέρουμε την ΒΕ που τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΑΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) το ΔΕΓΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) η ΑΗ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΑΕ. (Μονάδες 9)

2.GI_A_GEO_2_2825

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του ΒΜ και ΓΝ. Προεκτείνουμε την ΒΜ (προς το Μ) κατά τμήμα ΜΔ = ΒΜ και την ΓΝ (προς το Ν) κατά τμήμα ΝΕ = ΓΝ.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΔ//ΒΓ και ΑΕ//ΒΓ. (Μονάδες 13)

β) Είναι τα σημεία Ε, Α και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

3.GI_A_GEO_2_2827

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΒΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρουμε τις κάθετες ΑΕ και ΓΖ στη ΒΔ, που την τέμνουν στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΓΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

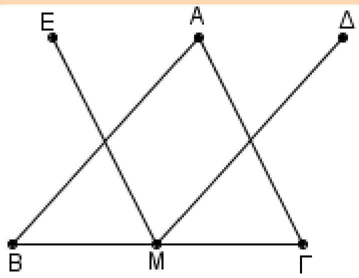
4.GI_A_GEO_2_2829

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΒΑ και ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓΑ.
Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΑ = ΑΕ (Μονάδες 8)

β) Τα σημεία Δ, Α και Ε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 9)

γ) ΔΕ = ΒΓ (Μονάδες 8)



5.GI_A_GEO_2_2834

Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΒ = 2ΑΔ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

6.GI_A_GEO_2_2836

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε ΟΕ = ΟΖ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΕ = ΒΖ (Μονάδες 12)

β) το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

7.GI_A_GEO_2_2858

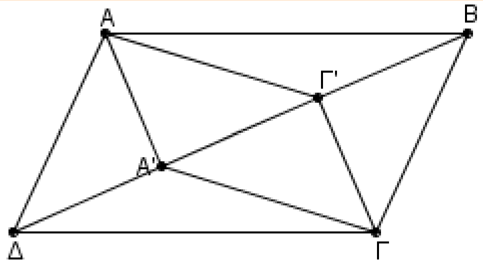
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ΒΓ και Ε το μέσο της πλευράς του ΑΒ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
β) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$. (Μονάδες 15)

8.GI_A_GEO_2_3411

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΜΔ = ΔΕ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)
β) Η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 13)

9.GI_A_GEO_2_5073

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Α΄, Γ΄ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ. Αν τα σημεία Α΄ και Γ΄ δεν ταυτίζονται , να αποδείξετε ότι:
α) ΑΑ΄// ΓΓ΄ (Μονάδες 8)
β) ΑΑ΄=ΓΓ΄ (Μονάδες 10)
γ) Το τετράπλευρο ΑΓ΄ΓΑ΄ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

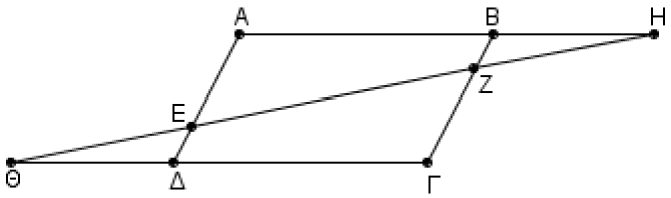


10.GI_A_GEO_2_5104

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{\Delta}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

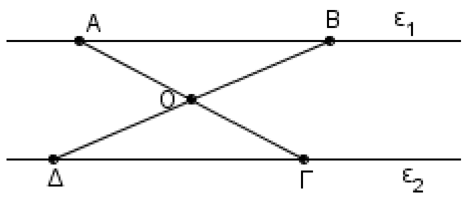
11.GI_A_GEO_2_5108

Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια ώστε ΑΕ = ΓΖ . Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι:
α) $H\hat{B}Z = E\hat{\Delta}\Theta$ (Μονάδες 8)
β) $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$ (Μονάδες 8)
γ) ΒΗ = ΘΔ (Μονάδες 9)



12.GI_A_GEO_2_5129

Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και το σημείο Ο είναι το μέσο της ΒΔ.
Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να γράψετε τα ίσα στοιχεία τους. (Μονάδες 12)
β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



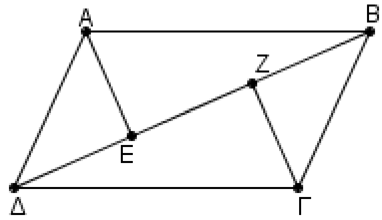
13.GI_A_GEO_2_5162

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ > ΒΓ φέρουμε από τις κορυφές Α και Γ καθέτους στη διαγώνιο ΒΔ, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΕ = ΓΖ. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

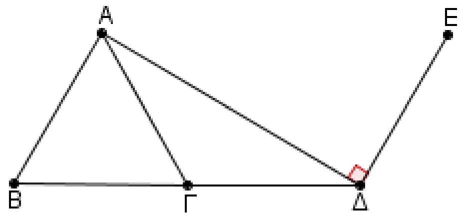


14.GI_A_GEO_2_5568

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ . Στην προέκταση της ΒΓ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΔ στο σημείο της Δ , τέτοιο ώστε ΔΕ = ΒΓ. (Α και Ε στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ΒΔ).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΒΔΕ παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



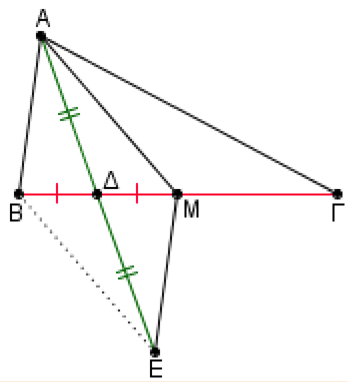
15.GI_A_GEO_2_5574

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει ΒΓ= 2ΑΒ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ και Ε σημείο στην προέκτασή της ώστε ΑΔ = ΔΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

β) ΜΕ = ΜΓ (Μονάδες 13)



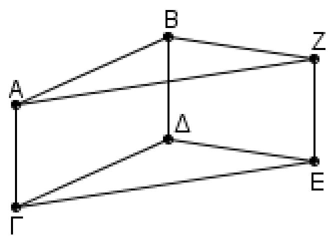
16.GI_A_GEO_2_5589

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΔΓ και ΒΔΕΖ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) $A\hat{B}Z = \Gamma\hat{\Delta}E$. (Μονάδες 12)

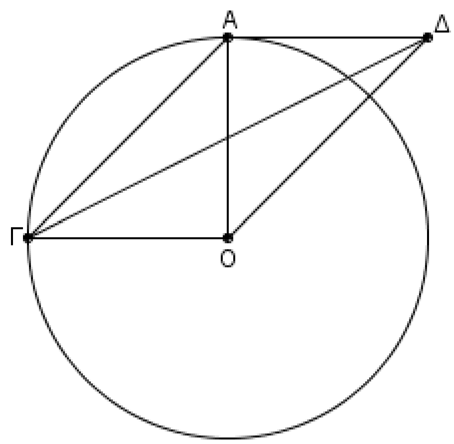


17.GI_A_GEO_2_5635

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε κάθετες ακτίνες ΟΑ , ΟΓ και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα ΑΒ με ΟΓ = ΑΒ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΟ και ΒΓ διχοτομούνται. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΟΓ. (Μονάδες 15)



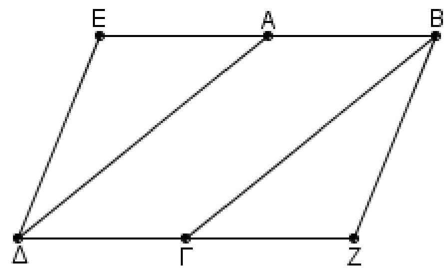
18.GI_A_GEO_2_5654

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ (προς το Α) και την πλευρά ΔΓ (προς το Γ) κατά τμήματα ΑΕ = ΑΒ και ΓΖ = ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΖ = ΕΔ (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



19.GI_A_GEO_2_6882

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΔ = ΜΑ. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)

β) $ΒΜ = \frac{ΑΕ}{2}$ (Μονάδες 13)

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ (4)

1.GI_A_GEO_2_5071

Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) ΜΔ = ΜΓ. (Μονάδες 12)

β) Η ευθεία ΜΝ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ. (Μονάδες 13)

2.GI_A_GEO_2_5588

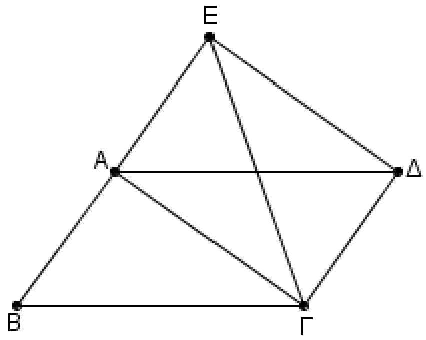
Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$ (Μονάδες 8)



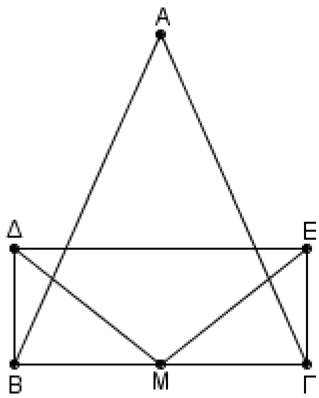
3.GI_A_GEO_2_5615

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ = ΑΒ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Στα σημεία Β και Γ φέρουμε κάθετες στη ΒΓ προς το ίδιο μέρος, και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΜΕ = ΜΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



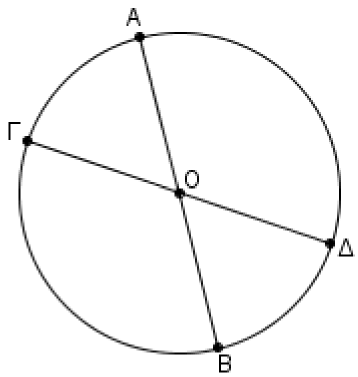
4.GI_A_GEO_2_5646

Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε δυο διαμέτρους του ΑΒ και ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)



ΡΟΜΒΟΣ (5)

1.GI_A_GEO_2_3422

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε το ΑΔ (προς το Δ) κατά τμήμα ΔΕ = ΑΔ. Έστω Κ το συμμετρικό του Β ως προς το Δ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΚ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΑΒΕΚ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

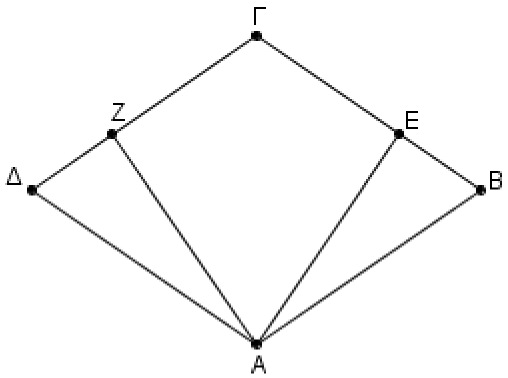
2.GI_A_GEO_2_3427

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι $ΑΕ \perp ΒΓ$ και $ΑΖ \perp ΔΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, τότε ΑΖ = ΑΕ. (Μονάδες 12)

β) Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει ΑΖ = ΑΕ, τότε αυτό είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)



3.GI_A_GEO_2_5024

Σε κύκλο κέντρου Ο, έστω ΟΑ μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της ΟΑ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι ρόμβος. (Μονάδες 12)

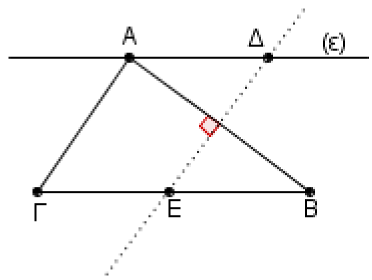
4.GI_A_GEO_2_5554

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΓΒ. Φέρουμε από τη κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΑ = ΔΒ και ΕΑ = ΕΒ. (Μονάδες 6)

β) Αν Μ το μέσο του ΑΒ, να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)



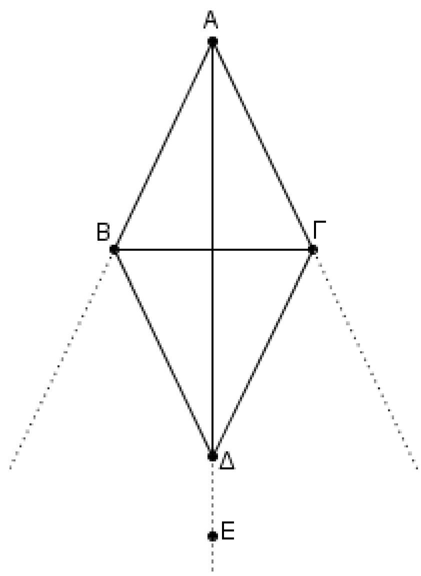
5.GI_A_GEO_2_5641

Δίνεται ρόμβος ΑΒΔΓ. Στην προέκταση της διαγωνίου ΑΔ (προς το Δ) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο Ε ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ (προς το μέρος των Β και Γ αντίστοιχα). (Μονάδες 10)

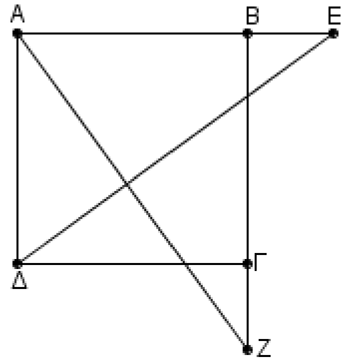
β) Το σημείο Ε ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ. (Μονάδες 15)



ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ (4)

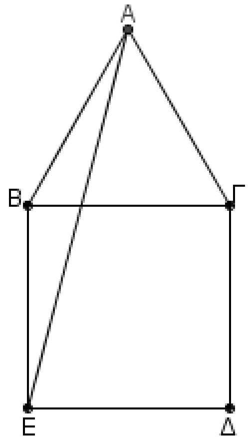
1.GI_A_GEO_2_5575

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των ΑΒ (προς το Β) και ΒΓ (προς το Γ) αντίστοιχα, ώστε ΒΕ = ΓΖ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΕΔ είναι ίσα.
(Μονάδες 12)
β) Οι γωνίες ΕΔΓ και ΑΖΒ είναι ίσες.
(Μονάδες 13)



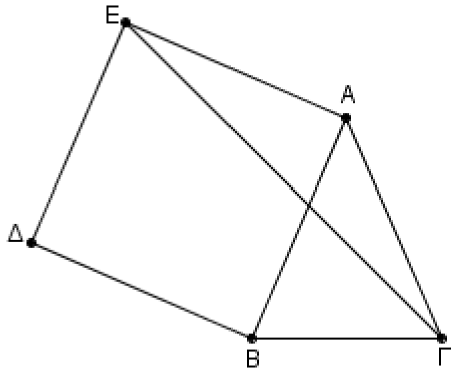
2.GI_A_GEO_2_5586

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες
i. $A\hat{B}E$ (Μονάδες 8)
ii. $B\hat{E}A$ (Μονάδες 9)
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές.
(Μονάδες 8)



3.GI_A_GEO_2_5587

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές.
(Μονάδες 10)
β) $2.E\hat{\Gamma}A = 90^0 - B\hat{A}\Gamma$.
(Μονάδες 15)



4.GI_A_GEO_2_5601

Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
(Μονάδες 13)
β)Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι τετράγωνο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 12)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ (9)

1.GI_A_GEO_2_3412

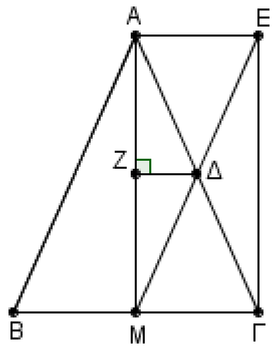
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΜΔ = ΔΕ . Αν το σημείο Ζ είναι το ίχνος του Δ στην ΑΜ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 12)

β) $\Delta Z = \dfrac{B\Gamma}{4}$

(Μονάδες 13)



2.GI_A_GEO_2_3418

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΔΒΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Η ευθεία ΔΖ διχοτομεί το τμήμα ΑΕ. (Μονάδες 12)

3.GI_A_GEO_2_5021

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο είναι το κέντρο του. Έστω Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των ΟΔ, ΟΑ, ΟΒ και ΟΓ αντίστοιχα.

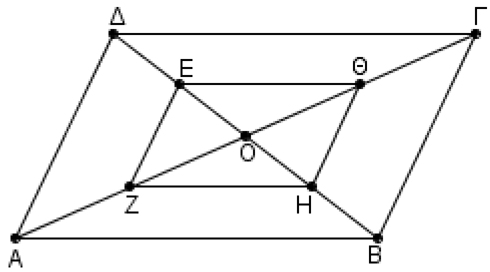
Να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του ΕΘΗΖ.

(Μονάδες 15)



4.GI_A_GEO_2_5039

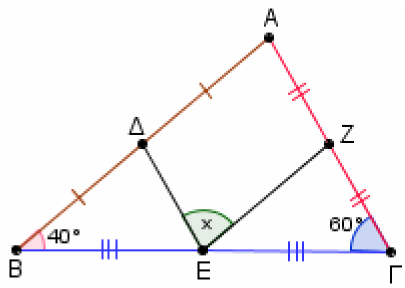
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 40^0$ και $\hat{\Gamma} = 60^0$. Επιπλέον, τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $B\hat{\Delta}E = E\hat{Z}\Gamma$. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\Delta\hat{E}Z$. (Μονάδες 8)



5.GI_A_GEO_2_5103

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 40^0$ και $\hat{B} = 70^0$. Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ με ΔΕ = 9 και ΕΓ = 16.

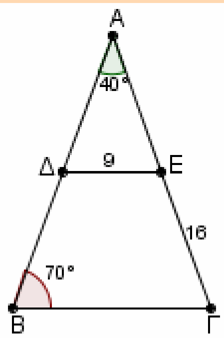
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του.

(Μονάδες 8)

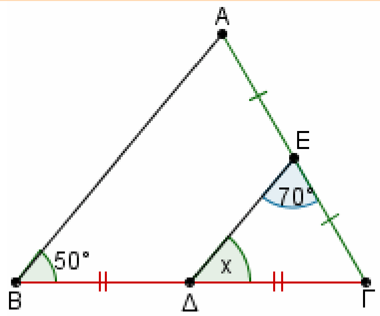
β) Να αποδείξετε ότι ΒΓ = 18. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)



6.GI_A_GEO_2_5111



Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=50^0$. Έστω ότι τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta\hat{E}\Gamma=70^0$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί ΔΕ//ΑΒ (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε

I. τη γωνία $\hat{x}$ (Μονάδες 9)

II. τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)

7.GI_A_GEO_2_5124

Στο ακόλουθο σχήμα ισχύουν ΑΒ = ΒΔ = ΑΓ = ΓΕ = 5, ΒΚ⊥ΑΔ και ΓΛ⊥ΑΕ.

α) Να προσδιορίσετε, ως προς τις πλευρές, το είδος των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

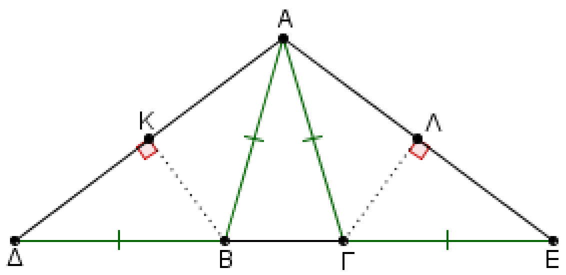
(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.

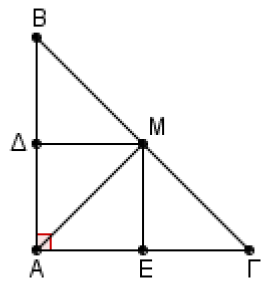
(Μονάδες 10)

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ.

(Μονάδες 9)



8.GI_A_GEO_2_5593



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ΜΔ = ΜΕ τότε:

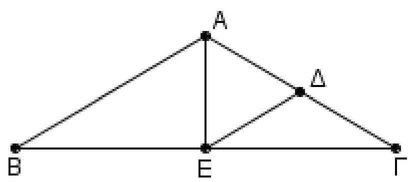
i. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΜΕ. (Μονάδες 8)

9.GI_A_GEO_2_5653

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ = ΑΒ, και γωνία $\hat{B}$ ίση με 30^0 . Θεωρούμε Δ και Ε τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $E\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

(Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\overset{\triangle}{\Delta}E$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 9)

ΜΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ (31)

1.GI_A_GEO_2_2832

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, προεκτείνουμε την πλευρά ΔΑ (προς το Α) κατά τμήμα ΑΗ = ΔΑ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\Delta}$, η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο ΔΖΗ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία $\hat{Z}$. (Μονάδες 13)

2.GI_A_GEO_2_2841

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90^0$) και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.
Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$ (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΔΕΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

γ) $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$ (Μονάδες 9)

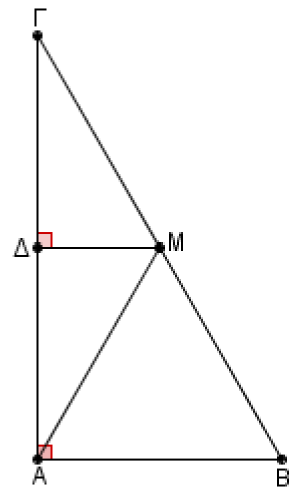
3.GI_A_GEO_2_2844

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία $\hat{A} = 120^0$ και ΑΒ = 2ΑΔ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) γωνία $A\hat{\Delta}E = 30^0$. (μον.10)

β) $AZ = \frac{AB}{4}$ (μον.15)

4.GI_A_GEO_2_2849



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με ΒΓ = 8 cm. Έστω ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$. Αν η γωνία $A\hat{M}\Gamma$ είναι ίση με 120^o, τότε:

α) Να δείξετε ότι ΑΒ = 4 cm. (Μονάδες 12)

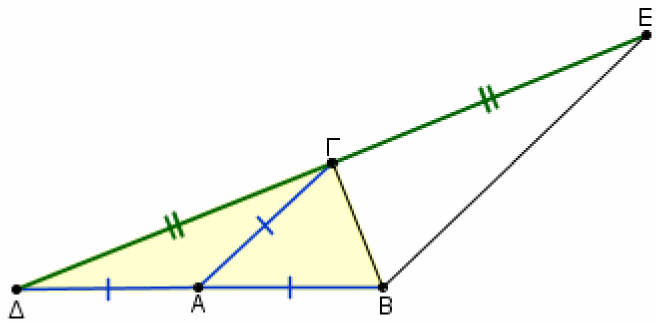
β) Να βρείτε το μήκος της ΜΔ. (Μονάδες 13)

5.GI_A_GEO_2_2852

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ =ΑΓ). Στην προέκταση της ΒΑ (προς το μέρος της κορυφής Α) παίρνουμε σημείο Δ ώστε ΑΒ = ΑΔ και στην προέκταση της ΔΓ (προς το μέρος της κορυφής Γ) παίρνουμε σημείο Ε ώστε ΔΓ = ΓΕ.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 12)



β) Να δείξετε ότι ΒΕ//ΑΓ και $ΑΓ = \frac{ΒΕ}{2}$. (Μονάδες 13)

6.GI_A_GEO_2_2856

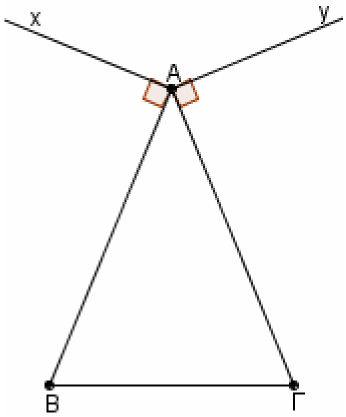
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε $Αx \perp ΑΒ$ και $Αy \perp ΑΓ$. Στις Αx και Αy θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.

(Μονάδες 12)

β) Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)



7.GI_A_GEO_2_3416

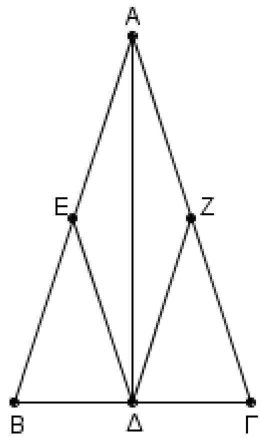
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξτε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΔΖ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΖΔΕ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)



8.GI_A_GEO_2_3419

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και γωνία $\hat{Γ} = 30^0$. Θεωρούμε το ύψος ΑΔ και το μέσο Ζ της πλευράς ΑΓ. Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ (προς το Δ) κατά ίσο τμήμα ΔΕ.
Να αποδείξετε ότι:

α) $ΔΖ = \frac{ΑΓ}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

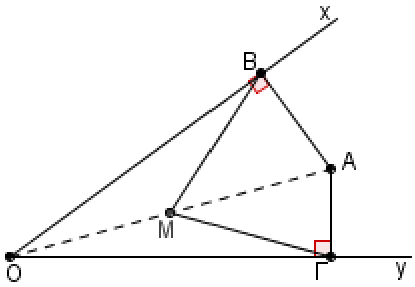
9.GI_A_GEO_2_5033

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α στο εσωτερικό της. Από το Α φέρνουμε τις κάθετες ΑΒ, ΑΓ προς τις πλευρές Οx , Oy της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε Μ το μέσο του ΟΑ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) $B\hat{M}\Gamma = 2.x\hat{O}y$ (Μονάδες 15)



10.GI_A_GEO_2_5059

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$). Έστω Δ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε, η διχοτόμος ΔΕ της γωνίας $A\hat{\Delta}B$ να είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ.

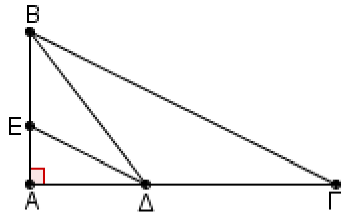
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Αν $A\hat{\Delta}B = 60^0$,

Ι. να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 8)

ΙΙ. να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2AB$ (Μονάδες 7)



11.GI_A_GEO_2_5096

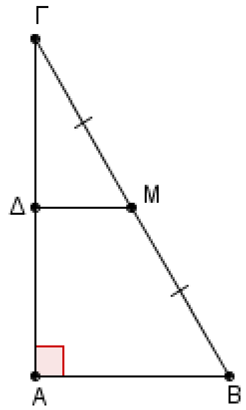
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με γωνία $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΒ , η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ.

α) Να υπολογίσετε

Ι. τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)

ΙΙ. τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΓ. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ. (Μονάδες 9)



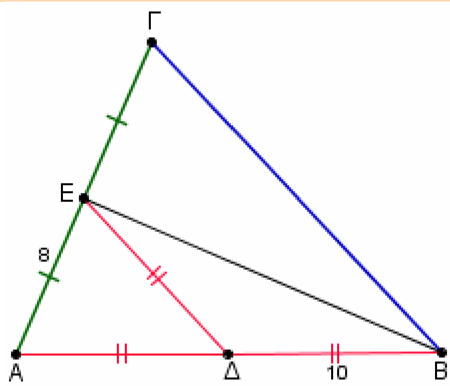
12.GI_A_GEO_2_5117

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι ΒΓ=20. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 9)



13.GI_A_GEO_2_5118

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν ΑΔ = ΕΔ = ΔΒ με ΑΕ = 8 και ΔΒ = 10 .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο.

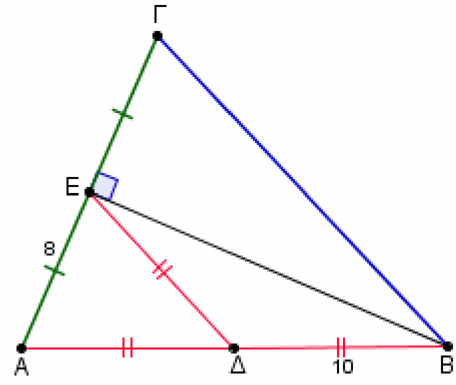
(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)



14.GI_A_GEO_2_5132

Στο παρακάτω σχήμα είναι $ε_1//ε_2$ και ΑΒ = 6.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω.

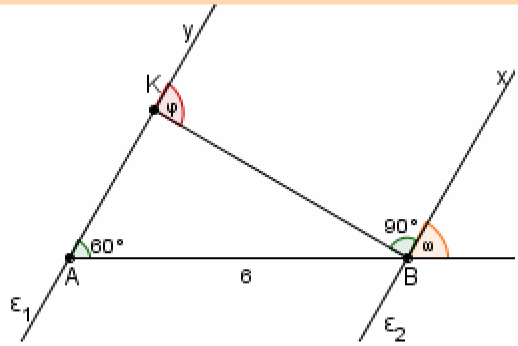
(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ΑΒΚ ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΚ, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)



15.GI_A_GEO_2_5149

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο Αx της γωνίας $\hat{A}$ και από το σημείο Γ την κάθετο ΓΔ στην Αx. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

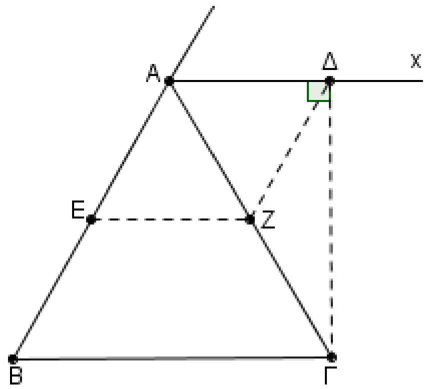
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΖΔ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 12)



16.GI_A_GEO_2_5557

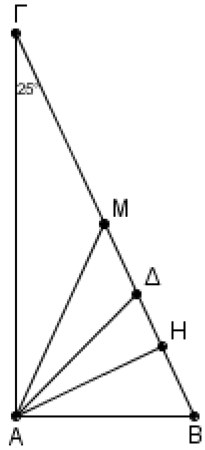
Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}+\hat{\Gamma}=120^0$ και $\hat{A}=3\hat{\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

(Μονάδες 15)

β) Αν η πλευρά ΒΓ = 2cm να βρείτε το μήκος της ΑΒ. (Μονάδες 10)

17.GI_A_GEO_2_5562



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$ και $\hat{\Gamma} = 25^0$. Δίνονται επίσης η διάμεσος ΑΜ, το ύψος ΑΗ από την κορυφή Α και η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$.

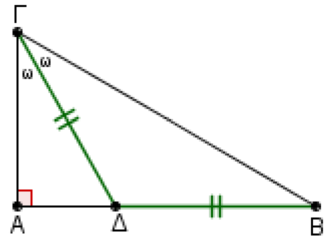
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{M}B$, $H\hat{A}B$, $A\hat{\Delta}B$.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}H = 20^0$.

(Μονάδες 10)

18.GI_A_GEO_2_5569



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με $\hat{A} = 90^0$) και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΓΔ = ΔΒ = 2cm. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{B} = 30^0$. (Μονάδες 12)

β) ΑΒ = 3cm (Μονάδες 13)

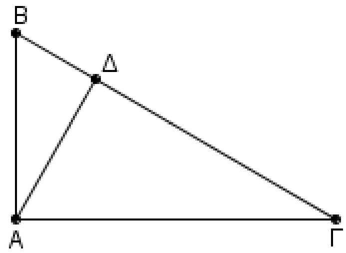
19.GI_A_GEO_2_5581

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$, $\hat{B} = 35^0$ και Μ το μέσο της ΒΓ.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΒ. (Μονάδες 15)

20.GI_A_GEO_2_5583



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή, $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$ και ΑΔ το ύψος του.

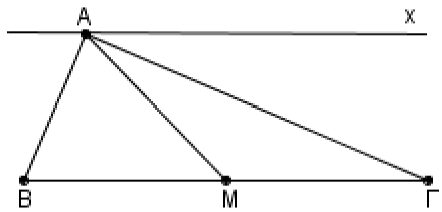
α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογιστεί η γωνία ΒΑΔ. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι: $B\Delta = \dfrac{AB}{2}$. (Μονάδες 9)

21.GI_A_GEO_2_5590



Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΜ με το σημείο Γ).

Να αποδείξετε ότι:

α) $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$ (Μονάδες 12)

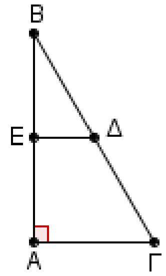
β) η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑx.

(Μονάδες 13)

22.GI_A_GEO_2_5621

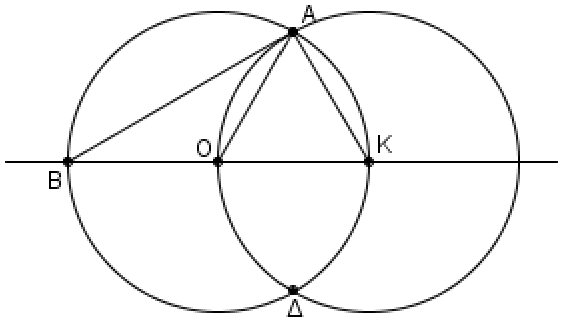
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^0$ και $\hat{B}=30^0$. Αν τα σημεία Ε και Δ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα με ΕΔ = 1, να υπολογίσετε τα τμήματα:

α) ΑΓ…… (Μονάδες 8)
β) ΒΓ….. (Μονάδες 9)
γ) ΑΔ….. (Μονάδες 8)
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



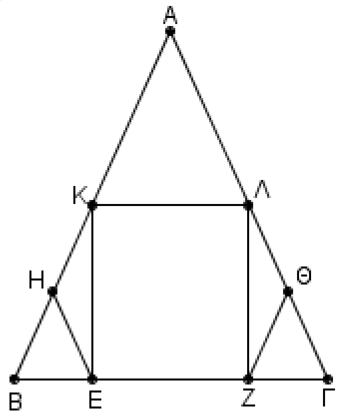
23.GI_A_GEO_2_5626

Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι (Ο,ρ) και (Κ,ρ) με ΟΚ = ρ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Δ.
α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΚ είναι ισόπλευρο.
(Μονάδες 10)
β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΚ.
(Μονάδες 15)



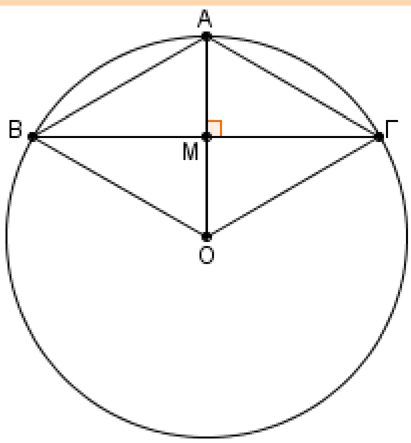
24.GI_A_GEO_2_5630

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Από τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΚΕ και ΛΖ στην πλευρά ΒΓ.
Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα $K\overset{\triangle}{E}\Gamma$ και $\Lambda\overset{\triangle}{Z}B$ είναι ίσα.
(Μονάδες 15)
β) ΕΗ = ΖΘ, όπου Η , Θ τα μέσα των τμημάτων ΚΓ, ΛΒ αντίστοιχα.
(Μονάδες 10)



25.GI_A_GEO_2_5637

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε την ακτίνα ΟΑ και τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ.
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι ρόμβος.
(Μονάδες 10)
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΓΟΒ.
(Μονάδες 15)



26.GI_A_GEO_2_5638

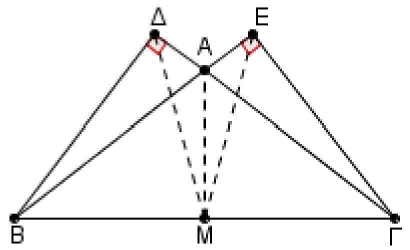
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΔΑΒΓ(ΑΓ = ΑΒ). Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ προς το Α φέρνουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ κάθετα στις ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι ΓΕ = ΒΔ. (Μονάδες 10)

β) Αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι ΜΕ = ΜΔ. (Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία $\Delta\hat{M}E$ (Μονάδες 7)

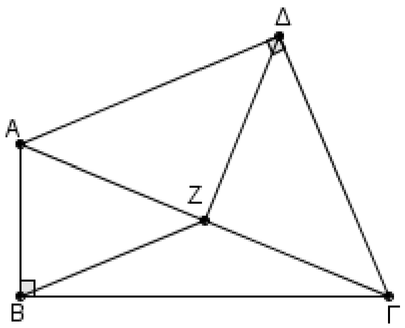


27.GI_A_GEO_2_5652

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $\hat{B} = 90^0$ και Ζ το μέσο του ΑΓ. Με υποτείνουσα το ΑΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ με $\hat{\Delta} = 90^0$.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΖ = ΒΖ. (Μονάδες 13)

β) Αν $A\hat{\Gamma}B = 30^0$, να υπολογίσετε τις γωνίες ΒΑΔ και ΒΓΔ. (Μονάδες 12)



28.GI_A_GEO_2_6580

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με και $\hat{A} = 90^0$ και $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ και την διάμεσο ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες $\hat{B}$ και $\Gamma\hat{A}\Delta$ είναι ίσες, (Μονάδες 12)

β) $A\hat{M}\Delta = 2.\hat{\Gamma}$. (Μονάδες 13)

29.GI_A_GEO_2_6582

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 60^0$. Φέρουμε τα ύψη ΑΕ και ΒΖ του παραλληλογράμμου που αντιστοιχούν στην ευθεία ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Gamma Z = \dfrac{A\Delta}{2}$, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ίσο με το τρίγωνο ΒΓΖ, (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

30.GI_A_GEO_2_6885

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε ΑΓ < ΑΒ.Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε ΑΔ = ΑΓκαι στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΑΕ = ΑΓ.

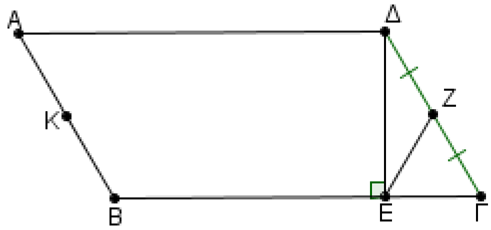
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\Gamma \perp E\Gamma$, (Μονάδες 12)

β) η γωνία ΕΑΓ είναι διπλάσια της γωνίας ΑΔΓ. (Μονάδες 13)

31.GI_A_GEO_2_7452

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{B} = 120^0$ και ΔΕ ⊥ ΒΓ. Έστω ΕΖ η διάμεσος του τριγώνου ΔΕΓ.



α) Να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Γ του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 8)

β) Αν Κ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, να αποδείξετε ότι ΕΖ = ΑΚ. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία ΕΖΓ. (Μονάδες 8)

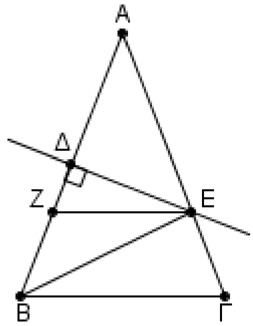
ΤΡΑΠΕΖΙΟ (21)

1.GI_A_GEO_2_2817

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στο μέσο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ.

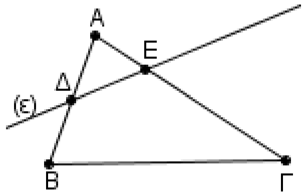
α) Να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΒΕ. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)



2.GI_A_GEO_2_2831

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ε) που τέμνει την πλευρά ΑΓ σε εσωτερικό της σημείο Ε. Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε ένα τρίγωνο ΑΔΕ και σε ένα τετράπλευρο ΒΔΕΓ .



α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου Ε, ώστε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του ΑΒΓ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

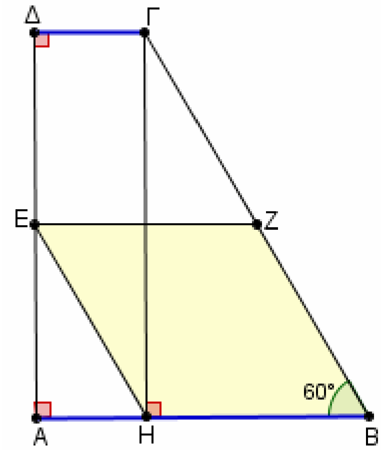
3.GI_A_GEO_2_2850

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^0$, ΑΒ > ΓΔ, ΒΓ = 4ΓΔ και $\hat{B} = 60^0$. Φέρουμε την ΓΗ ⊥ ΑΒ και θεωρούμε τα μέσα Ε και Ζ των πλευρών ΑΔ και ΒΓ αντιστοίχως.

Να δείξετε ότι:

α) ΑΒ = 3ΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Το τετράπλευρο ΕΗΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

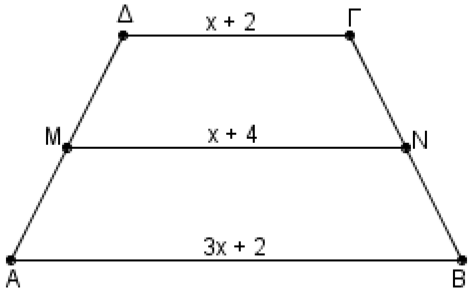


4.GI_A_GEO_2_2851

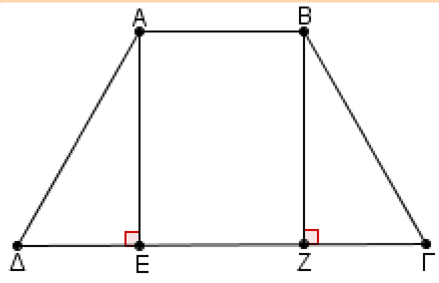
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ , ΑΒ > ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι ΑΒ = 3x + 2, ΓΔ = x +2 και το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου είναι ΜΝ = x + 4, τότε να δείξετε ότι x = 2. (Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου. (Μονάδες 13)



5.GI_A_GEO_2_3414



Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^0$, ΑΔ = 12 και ΓΔ = 20. Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

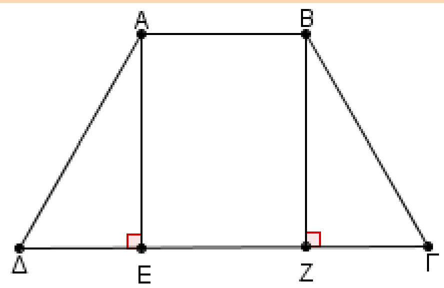
α) Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΓΖ και ΑΒ = ΕΖ.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου.

(Μονάδες 13)

6.GI_A_GEO_2_3415



Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

Να αποδείξετε ότι:

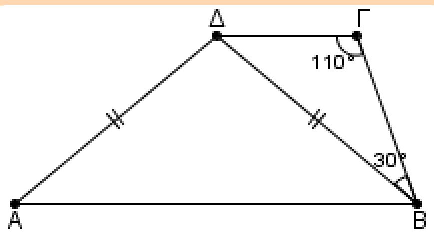
α) ΔΕ = ΓΖ.

(Μονάδες 12)

β) ΑΖ = ΒΕ.

(Μονάδες 13)

7.GI_A_GEO_2_4973



Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ στο οποίο η διαγώνιος ΒΔ είναι ίση με την πλευρά ΑΔ. Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 110^0$ και η γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma = 30^0$, να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{\Delta}B$.

(Μονάδες 25)

8.GI_A_GEO_2_5007

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ και ΑΒ < ΓΔ. Θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ πάνω στην ΑΒ έτσι ώστε ΑΕ = ΕΖ = ΖΒ και έστω Κ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

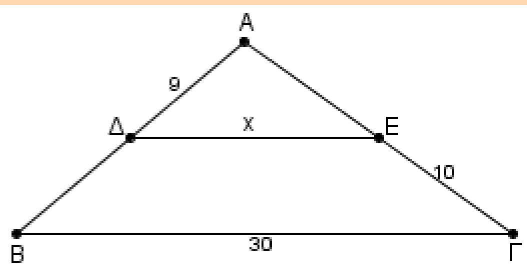
α) ΔΖ = ΓΕ

(Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα ΕΚΖ και ΔΚΓ είναι ισοσκελή

(Μονάδες 12)

9.GI_A_GEO_2_5113



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με Δ και Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΔ = 9 , ΕΓ = 10 και ΒΓ = 30 .

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος x του τμήματος ΔΕ.

(Μονάδες 8)

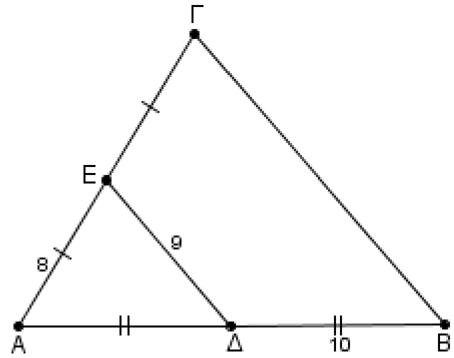
10.GI_A_GEO_2_5114

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ΑΕ = 8 , ΕΔ = 9 και ΔΒ = 10 .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου ΑΒΓ και του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ. (Μονάδες 9)

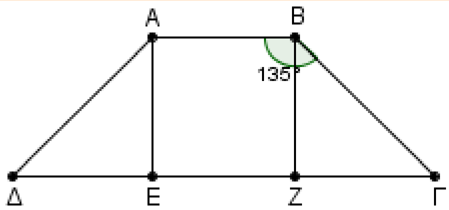


11.GI_A_GEO_2_5167

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ>ΑΒ και $\hat{B}=135^0$. Από τις κορυφές Α και Β φέρουμε τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ.

α)Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου. (Μονάδες 10)

β)Να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΕΔ = ΒΖ = ΓΖ (Μονάδες 15)



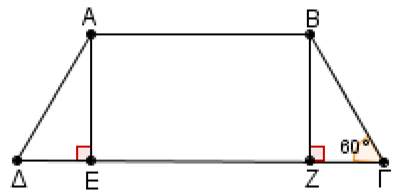
12.GI_A_GEO_2_5565

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) , με ΑΒ = 6,ΒΓ = 4 και $\hat{\Gamma}=60^0$. Δίνονται επίσης τα ύψη ΑΕ και ΒΖ από τις κορυφές Α και Β αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ, ΒΖΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)



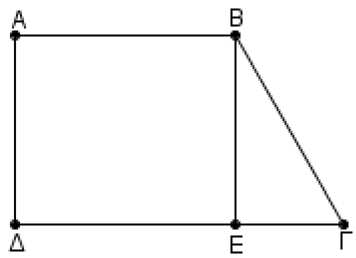
13.GI_A_GEO_2_5566

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) , με ΑΒ = ΒΓ = 4, $\hat{A}=90^0$ και $\hat{\Gamma}=60^0$. Δίνεται επίσης το ύψος ΒΕ από τη κορυφή Β.

α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραπεζίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε 2ΕΓ = ΒΓ. (Μονάδες 9)

γ) Αν Μ,Ν τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΜΝ. (Μονάδες 8)

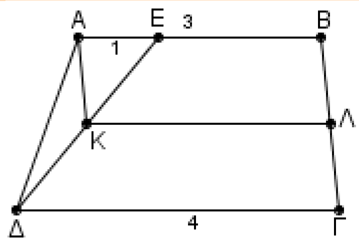


14.GI_A_GEO_2_5577

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ = 3, ΓΔ = 4. Θεωρούμε σημείο Ε στην ΑΒ ώστε ΑΕ = 1. Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ θεωρούμε τα Κ και Λ, μέσα των ΕΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

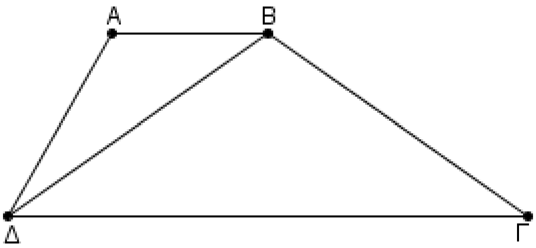
α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΚΛ του τραπεζίου ΕΒΓΔ. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



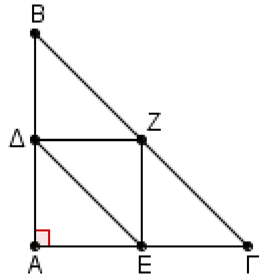
15.GI_A_GEO_2_5585

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΒΔ = ΒΓ.
Αν $\Delta\hat{B}\Gamma = 110^0$ και $A\hat{\Delta}B = 25^0$ να υπολογίσετε:
α) Τη γωνία Γ.
(Μονάδες 11)
β) Τη γωνία Α.
(Μονάδες 14)



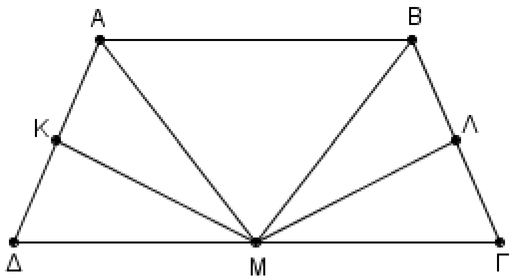
16.GI_A_GEO_2_5612

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) θεωρούμε τα μέσα Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
(Μονάδες 12)
β) Το τετράπλευρο ΕΔΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
(Μονάδες 13)



17.GI_A_GEO_2_5617

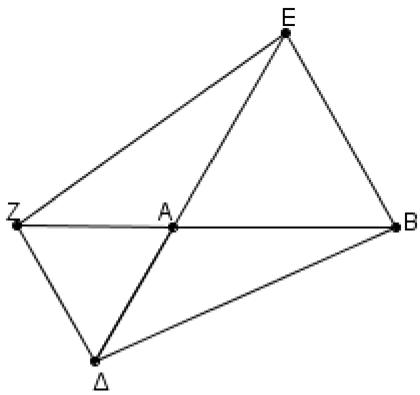
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΔΓ και τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τμήματα ΚΜ και ΛΜ είναι ίσα.
(Μονάδες 12)
β) Τα τμήματα ΑΜ και ΒΜ είναι ίσα.
(Μονάδες 13)



18.GI_A_GEO_2_5644

Έστω τρίγωνο ΑΒΔ με $\hat{A} = 120^0$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AEB}$ και $\overset{\triangle}{AZ\Delta}$.

Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΑΒΔ είναι ίσα.
(Μονάδες 12)
β) Το τετράπλευρο ΒΔΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
(Μονάδες 13)



19.GI_A_GEO_2_6583

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΝ = ΚΓ
.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα , (Μονάδες 8)
ii. το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
β) Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΝΔ και ΔΚ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΝΚΖΕ είναι τραπέζιο . (Μονάδες 9)

20.GI_A_GEO_2_6585

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ = 8 και ΔΓ = 12. Αν ΑΗ και ΒΘ τα ύψη του τραπεζίου,

α) να αποδείξετε ότι ΔΗ = ΘΓ. (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου. (Μονάδες 13)

21.GI_A_GEO_2_6590

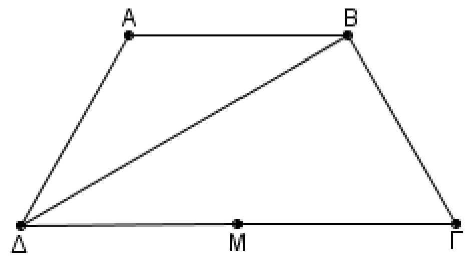
Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε

$AB = A\Delta = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$, $\hat{\Delta} = 60^0$ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) η ΔΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$, (Μονάδες 9)

β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 16)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{Ο} - ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΑΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

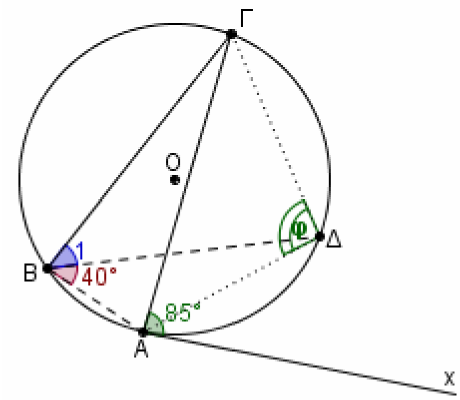
ΣΧΕΣΗ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΕΝΤΡΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (14)

1.GI_A_GEO_2_2819

Στο διπλανό σχήμα, η Αx είναι εφαπτομένη του κύκλου (Ο, ρ) σε σημείο του Α και επιπλέον ισχύουν $\Gamma\hat{A}x = 85^0$ και $\Delta\hat{B}A = 40^0$.

α) Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 = 45^0$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\varphi}$. (Μονάδες 15)

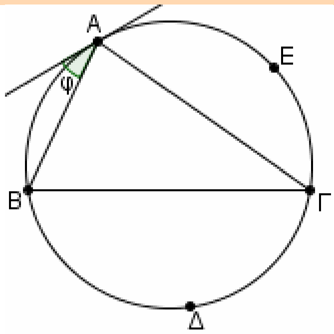


2.GI_A_GEO_2_3413

Στο ακόλουθο σχήμα, η εφαπτομένη του κύκλου στην κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει γωνία φ = 30^o με την πλευρά ΑΒ. Αν το μέτρο του τόξου $B\widehat{\Delta}\Gamma$ είναι 160^o,

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 18)

β) να βρείτε το μέτρο του τόξου $A\widehat{E}\Gamma$. (Μονάδες 7)

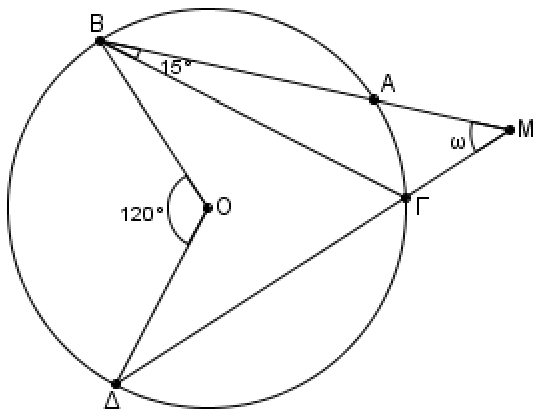


3.GI_A_GEO_2_5009

Στο ακόλουθο σχήμα η επίκεντρη γωνία $B\hat{O}\Delta$ είναι 120^0 και η γωνία $\Gamma\hat{B}A$ είναι 15^0.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία ΒΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ω είναι 45^0. (Μονάδες 13)

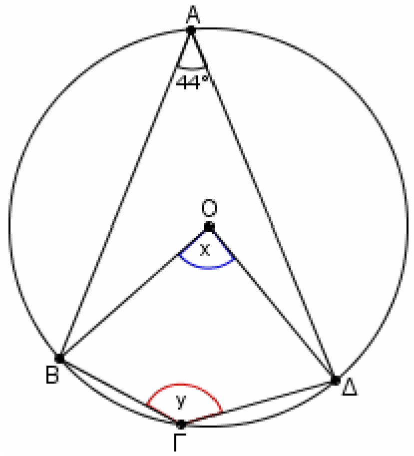


4.GI_A_GEO_2_5012

Σε κύκλο κέντρου Ο δίνονται οι χορδές ΑΒ και ΑΔ τέτοιες ώστε η γωνία $B\hat{A}\Delta$ να είναι 44^0. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου και σχηματίζουμε το τετράπλευρο ΒΓΔΟ.

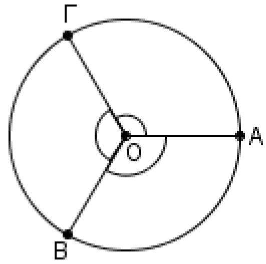
α) Να υπολογίσετε τη γωνία x. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία y είναι 136^0. (Μονάδες 13)



5.GI_A_GEO_2_5037

Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τρεις διαδοχικές ίσες γωνίες ΑΟΒ, ΒΟΓ και ΓΟΑ .



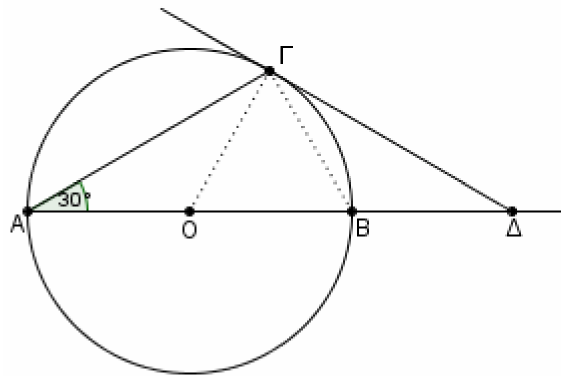
α) Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας ΑΟ διχοτομεί τη γωνία ΒΟΓ. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του. (Μονάδες 8)

γ) Αν με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΚ όπου Κ το μέσο της ακτίνας ΟΑ, γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ακτίνες ΟΒ και ΟΓ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα, τότε τα τόξα ΚΜ και ΑΒ είναι ίσα; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

6.GI_A_GEO_2_5153

Δίνεται κύκλος (Ο, R) διαμέτρου ΑΒ, και χορδή ΑΓ τέτοια ώστε $B\hat{A}\Gamma = 30^0$. Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ (προς το Β) στο σημείο Δ.

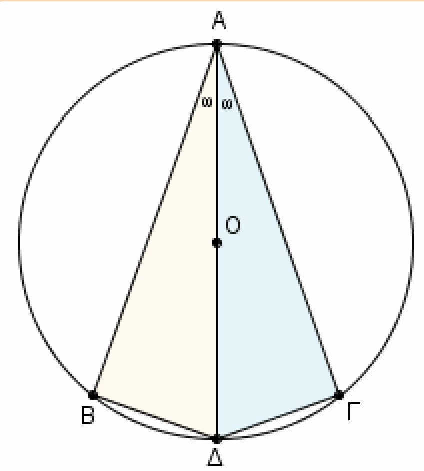


α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΓΒΔ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

7.GI_A_GEO_2_5603

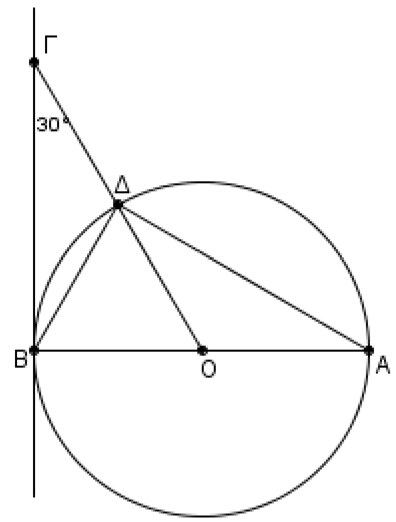
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Αν η διάμετρος ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, να αποδείξετε ότι:



α) Τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

8.GI_A_GEO_2_5608



Θεωρούμε κύκλο (Ο, ρ) και διάμετρό του ΑΒ. Στην εφαπτομένη του κύκλου στο Β θεωρούμε σημείο Γ τέτοιο ώστε, η γωνία ΒΓΟ να είναι ίση με 30^{o}. Αν η ΟΓ τέμνει τον κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι:

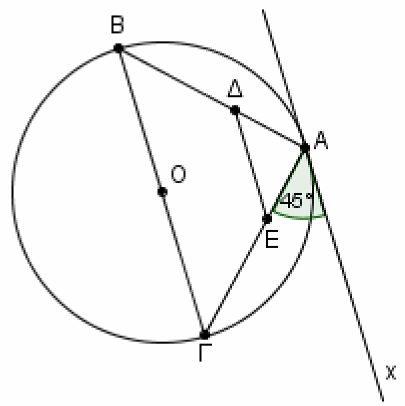
α) ΟΓ = 2ΟΑ.

(Μονάδες 12)

β) ΑΔ=ΒΓ.

(Μονάδες 13)

9.GI_A_GEO_2_5623



Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΒΓ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του Α ώστε να σχηματίζει με τη χορδή ΑΓ γωνία 45^{o}. Φέρουμε επίσης μια παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.

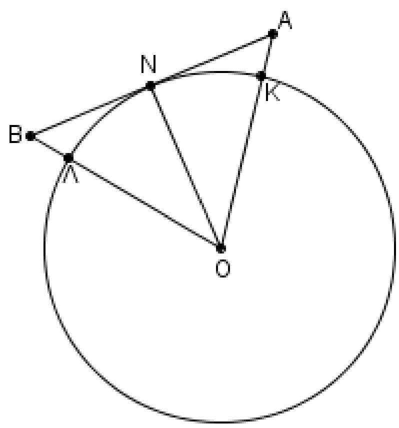
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

(Μονάδες 15)

10.GI_A_GEO_2_5633



Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Ν του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του Ν θεωρούμε σημεία Α και Β, τέτοια ώστε ΝΑ = ΝΒ. Οι ΟΑ και ΟΒ τέμνουν τον κύκλο στα Κ και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AOB}$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

β) Το σημείο Ν είναι μέσο του τόξου ΚΛ.

(Μονάδες 12)

11.GI_A_GEO_2_5634

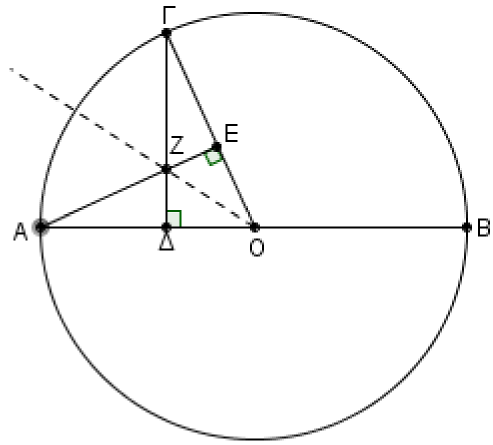
Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta O E}$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία ΛΑΟΓ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ.

(Μονάδες 12)



12.GI_A_GEO_2_6587

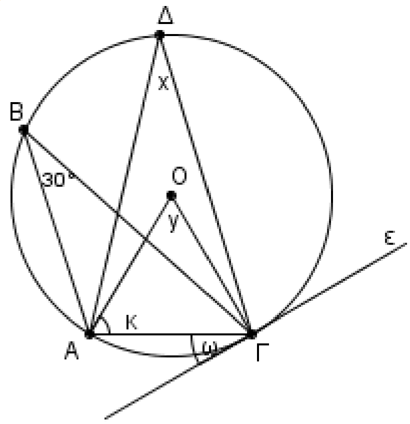
Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου (Ο,ρ) στο σημείο Γ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x , y και ω δικαιολογώντας σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές.

(Μονάδες 10)



13.GI_A_GEO_2_6588

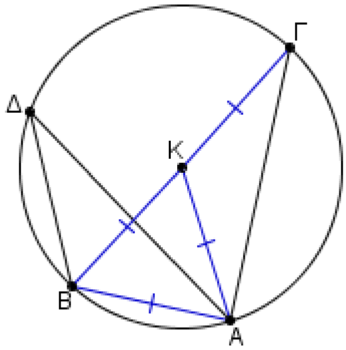
Έστω κύκλος κέντρου Κ, μια διάμετρός του ΒΓ και σημείο Α του κύκλου τέτοιο ώστε
ΒΑ = ΚΓ. Αν Δ τυχαίο σημείο του κύκλου διαφορετικό των Β και Γ,

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΚΑ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 7)

β) να υπολογίσετε την γωνία $B\hat{\Delta}A$. (Μονάδες 9)

γ) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ . (Μονάδες 9)



14.GI_A_GEO_2_6886

Έστω κύκλος κέντρου Ο και διαμέτρου ΒΓ. Θεωρούμε τα σημεία Α και Δ του κύκλου εκατέρωθεν της ΒΓ, τέτοια ώστε το τόξο ΒΔ να είναι διπλάσιο του τόξου ΔΓ.

Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο x του τόξου ΓΔ, (Μονάδες 8)

β) τη γωνία ΒΟΔ, (Μονάδες 9)

γ) τη γωνία ΒΑΔ. (Μονάδες 8)